A hipérbole

Praciano-Pereira, T. *

Sobral, 2 de setembro de 2023
preprints da Sobral Matemática
no. 2023.02
Editor Tarcisio Praciano-Pereira
tarcisio@sobralmatematica.org

Abstract

Das quatro cônicas, como curvas planas obtidas pela interseção dum cone de duas folhas com um plano, duas são instáveis no sentido de sistemas dinâmicos e vou chamar sua atenção sobre esta curiosidade, mas será apenas uma curiosidade aqui. Vou me fixar numa das cônica, na hipérbole.

palavras chave: cônicas, estabilidade das cônicas, hipérboles.

Among the plane figures that can be obtained by the intersection of a plane with a cone, the conics, two of them are unstable, in the sense of dynamic systems, I am putting this as curiosity this is not the point with this paper. I'll stick to the hyperbole and its equation.

keywords: conics, hyperbole, stability of conics.

*tarcisio@sobralmatematia.org

Este artigo ainda está sendo redigido e quando atingir a sua versão final, esta observação irá desaparecer. E porque publicar uma versão em produção*? Porque esta página é de préprints portanto contém trabalhos com os quais os autores almejam uma publicação futura e nos quais os autores se expõem na esperança de encontrar uma colaboração.*

Uma outra razão desta observação inicial é de organização da página, estou neste momento apenas reservando um número de publicação, um aviso para os que visitarem a página que este artigo está sendo escrito. Quando pronto, este aviso desaparecerá.

This paper is still been prepared and when ready this information will be dropped. And why publishing a production version*? This is a p reprints page and this means the papers published here are expected to be published in a final form else were but in the mean time the authors are exposing a work in progress expecting to find a collaborator.*

Another reason for this is organizational, the page is reserving a number of publication and in addition to that an announcement that the paper is in production but about to be finished. When the paper is finished, this note will be dropped.

1 Objetivo

O meu objetivo é pedagógico, a construção das equações das cônicas é uma questão antiga e é sempre feita a partir das definições geométricas que estas curvas planas têm. Eu vou sair um pouco do habitual com a esperança de chamar atenção do conceito de estabilidade, das equações diferenciais com o objetivo de estimular sua curiosidade por este tipo de equações. Vou também fazer referência ao Cálculo porque o objetivo desta disciplina é rever conceitos e promover uma experiência com cálculos e expressões algébricas em apoio ao Cálculo, mas em nenhum momento estas referências vão representar uma dificuldade para entender o texto, serão sempre observações feitas à margem do texto, complementares. Este texto é parte do projeto dum livro sobre a disciplina e consequentemente você vai encontrar no texto menção aos outros capítulos. Também os textos de Geometria Analítica em que o assunto se enquadra, desenvolvem um excesso de propriedades que foram importantes em outra época, hoje a Geometria Analítica tem um papel modesto de ser uma matéria introdutória como apoio ao Cálculo e à Álgebra Linear então grande parte das propriedades das cônicas devem ser tratadas no Cálculo ou na Álgebra Linear até mesmo porque para estas duas disciplinas muitas propriedades ou transformações que historicamente pertenciam à Geometria Analítica podem ser feitas com mais facilidade e clareza, o meu objetivo é apresentar as cônicas porque elas aparecem no Cálculo com primeiros exemplos sendo importante que a estudante compreenda o que elas representam graficamente.

As quatro cônicas são obtidas quando um plano corta um cone de duas folhas. É interessante associar a origem geométrica das cônicas com a presença das mesmas no Universo como quase-órbita dos corpos celestes. Na ótica se diz que um raio de luz se propaga segundo uma reta e geometricamente se calcula o seu ângulo de refração. Mas em todo o Universo não há uma única reta, nem círculos, esferas, elipses, parábolas ou hipérboles porque a atração gravitacional distorce todos estes entes geométricos, ainda assim é importante considerar as equações que a Geometria Analítica trata como aproximações da realidade e tanto estas aproximações funcionam que estamos colocando objetos espaciais em órbita da Lua e de Marte usando aproximações de elipses, parábolas e hipérboles. Fora isto, grande parte do treinamento que você vai ter no Cálculo exige uma prática com as cônicas e esta é a função da Geometria Analítica.

Deixe-me estabelecer algumas noções de que preciso para desenvolver o problema. Primeiro o contexto, e vou repetir algumas vezes esta descrição por necessidades do momento. De maneira geral se apresentam *as cônicas* como resultado da interseção dum plano com um cone de duas folhas. Depois, se definem estas cônicas com propriedades geométricas e existe um hiato entre estas duas definições que eu observei mas não consegui fechar. É preciso que estudante e professora observem este salto lógico e se estabeleça a curiosidade para que ele seja resolvido, mas eu não vou entrar neste problema aqui. É muito provável que isto seja uma questão resolvida e com certeza deve ser bem complicada de explicar.

Eu vou passar a me referir a este plano que corta o cone, como `o plano`. Qualquer `plano` que corte `um cone de duas folhas` vai produzir uma cônica com a interseção então há uma infinidade de cônicas com distintas equações mas a diferença entre elas é escala de grandeza junto com uma translação ou rotação, todas estas são operações lineares que não alteram a forma geométrica do objeto transformado se tiverem determinante diferente de zero o que também garante que as transformações podem ser desfeitas.

Eu vou "*singularizar*" um cenário fixando um plano, `o plano`, que vou rodar tomando *fotos* de cada uma das quatro situações que aparecem nas figuras (fig. 1a),(fig. 1b), (fig. 1c),(fig. 1d) e (fig. 1e).

Se você usar uma *distribuição LinuX* lhe será possível abrir este texto duas vezes, em duas janelas lado a lado, e numa delas deixar visível as figuras para acompanhar o correr do texto na outra. É uma vantagem muito grande usar uma *distribuição LinuX*!

As figuras (fig. 1a),(fig. 1b), (fig. 1c),(fig. 1d) e (fig. 1e) na página 3, lhe mostram quatro das interseções dum plano com um cone. Evitei a imagem do círculo porque não consegui uma boa imagem.

Acompanhe a nomenclatura que vou estabelecer nas figuras (fig. 2) na página 4 Infelizmente este texto é estático e vou mostrar-lhe quatro situações que descrevem geometricamente, numa figura plana, como um plano corta um cone no espaço. As figuras "*espaciais*" anteriores devem completar a sua visão ou talvez o que vou mostrar-lhe agora complementem o que você viu nas figuras anteriores. Se você achar que a informação é redundante, salte esta explanação que é apenas uma repetição complementar.

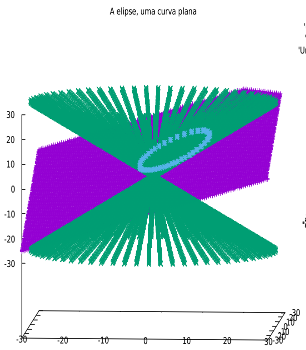
Sei que é preciso fazer um *esforço grande de abstração* para entender o que se passa *no espaço tridimensional* olhando *uma figura plana* mas vou lhe passar o acesso aos comandos do `gnuplot` que geraram as imagens anteriores, com os quais você poderá repetir a construção usando `gnuplot` que lhe dará a possibilidade de mover as imagens com o *ratinho* e ter uma ideia melhor do que se passa em dimensão três.

Além disto eu estou tentando lhe mostrar a relação d`o plano` que corta o cone em quatro posições em que se dão as mudanças entre as cônicas. As quatro figuras estão marcadas por *etiquetas* que eu deixei enquadradas num retângulo "*com fronteira pontilhada*", na lateral, indicando que corresponde *a cônica que estiver no foco*, porque eu coloquei a etiqueta ao lado da figura que lhe corresponde. Confira agora a (fig. 2), na lateral aparecem as quatro etiquetas entretanto "1" está dentro dum retângulo com fronteira pontilhada, porque eu "retirei" desta posição a real etiqueta que coloquei ao "lado do segmento de reta" que representa o círculo. Fiz o mesmo com as outras cônicas.

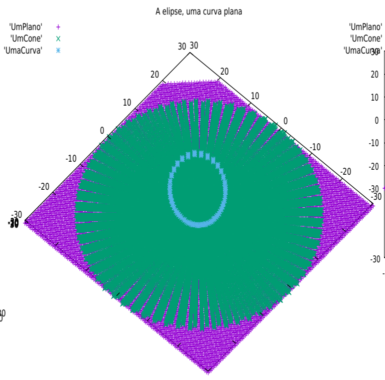
1. o círculo legenda 1
2. a elipse legenda 2
3. a parábola legenda 3
4. a hipérbole, dois ramos. legenda 4

O projeto é este e eu vou agora registrar *algumas "variáveis" do processo.*

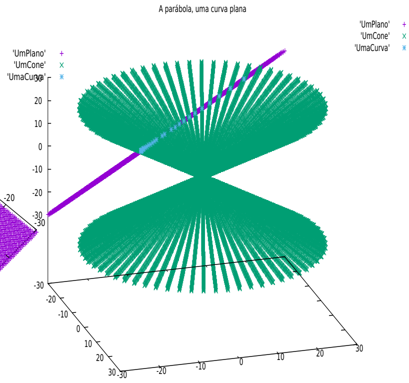
- *o plano.* Pensando de partida num plano que corte um cone, perpendicularmente ao seu eixo, o que resulta num círculo. Há uma infinidade de planos com esta descrição e vou selecionar um, a que vou me referir como *o plano* que corta o cone.
- O `cone` é uma superfície formada de duas folhas simétricas com um único ponto em comum chamado de *vértice do cone* . *O plano* poderia passar no vértice e determinaria um círculo degenerado, um único ponto, se *o plano* cortar o cone no vértice que é o ponto de conexão entre as duas folhas.



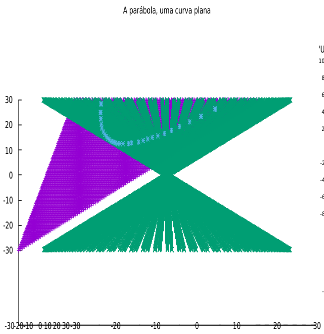
(a) a elipse



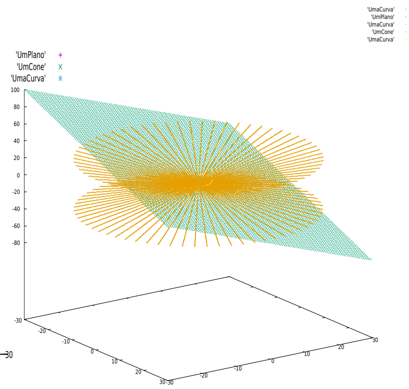
(b) novamente a elipse



(c) Plano corta paralelamente à diretriz



(d) A parábola



(e) Cone cortado por um plano, `hipérbole`

Vou me afastar desta posição e vou me situar num ponto O, do eixo, distante do vértice do cone. Este ponto é o centro do círculo determinada pelo *o plano* e por ele passa uma reta perpendicular ao eixo do cone, determinando um diâmetro do círculo, em torno da qual *o plano* irá girar. Esta reta *é uma das variáveis* do problema, na verdade ela é uma *constante*, ela vai ficar fixa durante todo o processo e *o plano* é que vai girar em torno dela, ou em torno do diâmetro do círculo que que foi determinado por ela.

- *O diâmetro deste círculo* em torno do qual *o plano* passará a rodar, e o eixo do `cone` são dois referenciais do processo. Eu vou medir a rotação d*o plano* com o ângulo α entre o vetor perpendicular a*o plano* e o eixo do `cone`. Como associe a*o plano* um eixo de rotação, o *algoritmo* ficou bem definido.
- O processo se inicia quando $\alpha = 0$ produzindo a primeira cônica que é o `círculo` de centro no ponto O. Neste momento inicial $\alpha = 0$ e o vetor perpendicular a*o plano* está contido no eixo do `cone`.

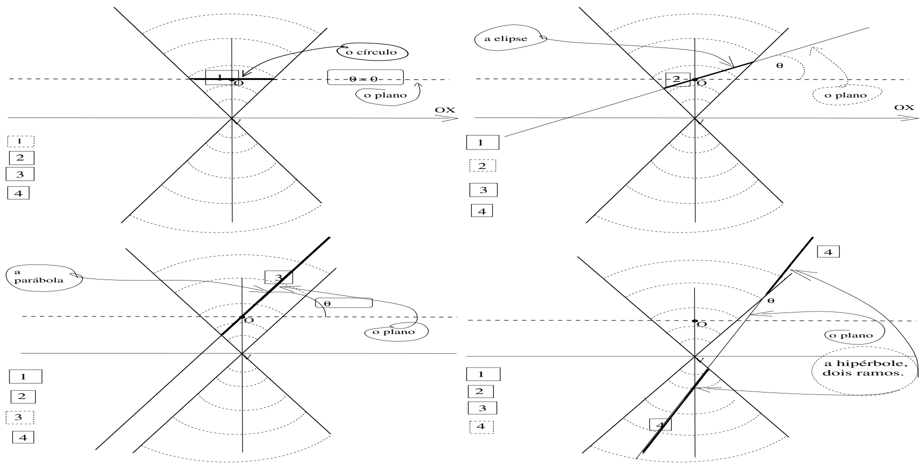


Figure 2: as quatro cônicas

Confira a etiqueta "1" na figura (fig. 2). *O plano* se encontra na posição inicial, perpendicular ao eixo do cone, com $\alpha = 0$. Corresponde a etiqueta "1" com fronteira pontilhada, e se confunde com uma reta que é perpendicular ao eixo do cone na "sua" perspectiva de visão da figura. Nela você pode observar

- *o plano* iniciando a rotação com $\alpha = 0$.
- o *diâmetro* como eixo de rotação do plano e
- o *ângulo* α que *o plano* faz com o eixo do `cone`.

são as *dados* do problema e na sucessão vou me referir a eles como *o plano*, *o diâmetro* e *o ângulo* α. Ao longo da descrição, *o plano* irá determinando o `círculo`, as `elipses`, a `parábola` e as `hipérboles`, vai variar *o ângulo* junto com a rotação d*o plano* que é quem vai determinar as cônicas. Observe que deixei duas cônicas no singular porque elas aparecem e seguida desaparecem, são figuras instáveis, ao passo que *elipses* e *hipérboles* persistem dentro dum certo intervalo de variação do *ângulo* α, elas são *estáveis.*

Não há nada estável no Universo, a diferença é que alguns fenômenos são imagens duma constante, *instáveis*, outros dum intervalo, *estáveis*...

- O ângulo θ entre a `diretriz do cone` e o eixo `do cone` é um outro dado do processo. Eu escolhi $\theta = \frac{\pi}{4}$ como medida deste ângulo. Este angulo poderia ser qualquer entre 0 e $\frac{\pi}{2}$, mas, pense nos copos de papel em que você pode beber chá em restaurantes, aqueles que são cônicos enfiados num suporte semelhante ao suporte para filtros de papel para coar café. O ângulo entre o eixo do cone e a geratriz, que forma o copo cônico, fica próximo de $\theta = \frac{\pi}{4}$. Se a medida for maior do que esta o risco é grande de que você tome um banho de chá, se for muito menor você será obrigado a virar muito o copo para sorver todo o conteúdo e pode terminar sujando o queixo. Um ângulo agradável é $\theta = \frac{\pi}{4}$ que foi o que eu escolhi para gerar o cone nas primeiras figuras, o ângulo θ entre a geratriz é o eixo do cone é um *dado fixo* do processo.

- Começando o processo, a produção das cônicas. Considere *o plano*, inicialmente fixo, comece a girar e seja o ângulo $\alpha = 0$ dele com o eixo do `cone` determinando o círculo mencionado acima.

  1. $\alpha = 0$. O ângulo α é o parâmetro que vai registrar a posição `do plano` que está girando. Então a $\alpha = 0$ corresponde a um `círculo`.
  2. Quando $\alpha \in (0, \frac{\pi}{4})$ as curvas são `elipses`. Observe o intervalo aberto, no primeiro extremo eu tinha um `círculo`, no segundo extremo vai aparecer uma `parábola`.

3. Quando $\alpha = \frac{\pi}{4}$ resulta numa `parábola`, *o plano* se encontra paralelo com a geratriz do cone e então corta apenas uma das folhas segundo uma curva infinita que é a `parábola`.

Intervalos abertos são típicos em questões de estabilidade!

4. Quando $\alpha \in (\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$ resulta em `hipérboles` porque o *o plano* deixou de ser paralelo à superfície cone cortando as duas folhas, e, quando $\alpha = \frac{7\pi}{4}$ surge novamente uma parábola. Observe o intervalo aberto! Nos extremos deste intervalo, $\alpha = \theta = \frac{\pi}{4}$ e $\alpha = \theta = \frac{7\pi}{4}$ marcam a abertura do cone e é quando o *o plano* fica paralelo à superfície do `cone` cortando apenas uma das folhas, resulta numa `parábola`. O centro deste intervalo $(\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$ é quando $\alpha = \pi$, o *o plano* vai estar paralelo ao eixo do `cone`, mais precisamente, vai conter o eixo do `cone` e o resultado ficará invisível para "*sua*" perspectiva de visão porque o cone estará perpendicular ao plano XOY e *você*, neste texto, é um *ser bidimensional* que vive no plano XOY, o resultado é uma hipérbole degenerada formada por duas retas que se cruzam no vértice do `cone` formando entre si um ângulo que mede $\frac{\pi}{2}$, a abertura total do `cone`.
5. Quando $\alpha \in (\frac{7\pi}{4}, 2\pi)$, um intervalo aberto, resulta em `elipses`, novamente, para finalmente retornar a um `círculo` quando $\alpha = 2\pi$ e o plano em rotação deu uma volta completa em torno do diâmetro do `círculo` que eu havia escolhido como eixo de rotação e com isto se terminou o *processo*.

Observe que `parábola` e `círculo` são obtidos exatamente quando α se encontra sobre a *fronteira dum intervalo*, $\alpha \in \{0, \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, 2\pi\}$, valores fixos, isolados. Elipses e hipérboles ocorrem dentro de intervalos abertos cujas extremidades são as posições em que surgem parábolas e círculos. Estas duas curvas, `círculos` e `parábolas`, são *instáveis* no sentido de qualquer variação do ângulo α que as determina, elas desaparecem dando lugar a `elipses` ou `hipérboles`.

Este é o sentido da *estabilidade* das `elipses` e `hipérboles`, assim como da *instabilidade* de `parábolas` e `círculos`. Este é um antigo conceito do estudo do comportamento das soluções duma equação diferencial que se supõe tenha sido descoberto por Poincaré no século 19. Poincaré viveu até 1912.

Vou voltar mais adiante a esta questão da *instabilidade* mas vou me fixar neste artigo nas `hipérboles`, mas adianto que quando você estudar *equações diferenciais* irá encontrar este conceito que se encontra ligado de maneira bem semelhante ao que aqui acontece em ao longo dum certo intervalo a solução duma *equação diferencial* é um *um tipo de curva* e nas extremidades deste intervalo surgem curvas aparentemente diferentes cuja existência se limita a um ponto, a extremidade do intervalo, como é o caso dos *círculos* e *parábolas* que são *soluções instáveis*.

Não há nada *estável* no Universo ...

Coincidentemente, elipses são as soluções *estáveis* na gravitação universal que se transformam em parábolas em pontos críticos quando uma nave espacial salta duma elipse sob a qual ela estava sob controle da gravidade dum determinado astro para a órbita de outro astro explorando a força de gravidade com principal método para navegar no espaço.

1.1 Aplicação potencial

É uma aplicação potencial porque estou apenas relatando um fato. Um foguete francês foi lançado no dia 14 de abril recém passado para ser colocado em órbita elíptica da Terra uma nave espacial que no momento exato irá sair da orbita em torno da Terra para entrar em órbita eliptica de Vênus para aguardar uma organização dos planetas que lhe otimizem um impulso gravitacional em seu objetivo de chegar a Júpiter e suas luas geladas dentro dos próximos oito anos. A passagem entre as órbitas deve ser feita ao longo duma parábola, aproximadamente, porque em todo o Universo não há uma única `reta`, `círculo`, `elipse`, `parábola` ou `hipérbole`. Mas eu não posso excluir a possibildade de que seja usada uma orbita hiperbólica, eu não conheço o projeto.

É bem possível que o projeto esteja disponível e pode ser um ótimo objetivo de aplicação na disciplina *equações diferenciais* deixando de ser *uma aplicação potencial*! Vou guardar a sugestão para a próxima edição do meu livro sobre *equações diferenciais*

Agora que eu descrevi a ação deixe-me passar a construir as equações na próxima seção.

2 Um padrão para hipérboles

Este artigo é um capítulo dum livro que estou terminando de escrever sobre Geometria Analítica e Álgebra Linear, será o último capítulo que vai tratar das `hipérboles`. Vou começar definindo a `hipérbole padrão` a curva definida pela equação

$$y = \frac{1}{x} \tag{1}$$

e esta minha escolha se deve a importância que a função

$$y = f(x) = \frac{1}{x}; x \neq 0; \tag{2}$$

tem no Cálculo Diferencial e Integral e várias aplicações de Matemática às Ciências Biológicas, à Química, ao decaimento radiativo etc...

Vou demonstrar que esta curva satisfaz à definição geométrica da hipérbole.

Definição 1 (hipérbole) *equação da hipérbole As hipérboles são formadas por dois ramos que são curvas infinitas espelhadas em torno duma reta chamada diretriz que corta ao meio o eixo que liga os focos. A definição geométrica da hipérbole é*

$$|d(F_1, P) - d(F_2, P)| = 2r \leq d(F_1, F_2) = 2c \tag{3}$$

no caso das elipses *a soma das distâncias do ponto P aos focos é constante.*

As `hipérboles` se assemelham muito às `elipses` e delas *diferem profundamente* ...Como as `elipses`, elas têm dois focos F_1, F_2 e dado um ponto genérico $P = (x, y)$ sobre uma `hipérbole` *a diferença entre as distâncias de P a cada um dos focos é constante.* Nas `elipses` o que é constante é a soma das distâncias de P a cada um dos focos e isto muda tudo!

Confira na figura (fig. 3), página 7, a imagem da `hipérbole padrão` desenhada *à mão livre*, usando `xfig`, um editor de gráficos. a partir da qual é possível obter qualquer outra e *inclusive retornar de qualquer outra* para esta *hipérbole padrão* com uma transformação linear. Logo vou lhe dar um exemplo duma tal transformação. Esta denominação "não é padrão" e você vai encontrar autores que preferem expressão diferente para a ser o *padrão* para hipérboles. Minha razão é muito forte para fazer esta denominação pela importância da função na equação (eq.3) em Cálculo.

3 hipérbole padrão

Vou provar que a expressão na equação (eq.3) satisfaz à definição da hipérbole. Eu sei que $y = \frac{1}{x}$ para $x \neq 0$ tem como gráfico uma hipérbole, e isto eu vou ter que demonstrar para você que teve a paciência de ler o texto até aqui. Ainda não sei quais são os seus focos, mas eu sei que eles se encontram sobre a primeira bissetriz dos eixos porque a curva $y = \frac{1}{x}$ é simétrica em torno de $y = x$ e antisimétrica relativamente ao eixo $y = -x$. Isto é fácil de provar:

1. Tome um segmento de reta perpendicular à $y = x$, ele vai cortar o gráfico de $y = \frac{1}{x}$ nos pontos $(x, \frac{1}{x})$ e em $(\frac{1}{x}, x)$, por exemplo, $(3, \frac{1}{3})$ e $(\frac{1}{3}, 3)$, ou $(-4, -\frac{1}{4})$ e $(-\frac{1}{4}, -4)$.

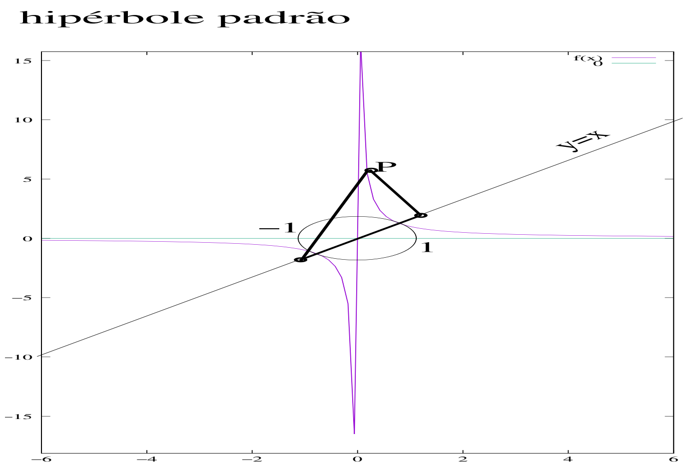


Figure 3: A hipérbole padrão

2. Também $y = \frac{1}{x}$ é antissimétrica em torno da reta $y = -x$ porque $f(x) = \frac{1}{x}$ é uma função impar, sempre para $x \neq 0$.

Então os focos são $F_1 = (m, m)$ e $F_2 = (-m, -m)$ e vou ter que calcular m aplicando a definição de hipérbole. Acompanhe as contas sobre as quais farei comentários em seguida.

$$m > 0; F_1 = (m, m); F_2 = (-m, -m); \tag{4}$$
$$P(x) = \frac{1}{x} \text{ ponto genérico da hipérbole: } (x, P(x)) = (x, \tfrac{1}{x}); x \neq 0; \tag{5}$$
$$d(P, F_1) = d\left((x, \tfrac{1}{x}), (m, m)\right) = \sqrt{(x-m)^2 + (\tfrac{1}{x} - m)^2}; \tag{6}$$
$$d(P, F_2) = d\left((x, \tfrac{1}{x}), (-m, -m)\right) = \sqrt{(x+m)^2 + (\tfrac{1}{x} + m)^2}; \tag{7}$$
$$(\forall P)\left(|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2r \leq d(F_1, F_2) = 2c\right); \tag{8}$$
$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = \pm 2r \Rightarrow d(P, F_1) = \pm 2r + d(P, F_2); \tag{9}$$
$$d(P, F_1)^2 = 4r^2 \pm 4rd(P, F_2) + d(P, F_2)^2; \tag{10}$$
$$d(P, F_1)^2 - d(P, F_2)^2 - 4r^2 = \pm 4rd(P, F_2); \tag{11}$$
$$\left(d(P, F_1)^2 - d(P, F_2)^2 - 4r^2\right)^2 = 16r^2 d(P, F_2)^2; \tag{12}$$
$$\left(-4mx - \tfrac{4m}{x} - 4r^2\right)^2 = 16r^2 d(P, F_2)^2; \tag{13}$$
$$16m^2x^2 + \tfrac{16m^2}{x^2} + 16r^4 + 32m^2 + 32mr^2x + \tfrac{32mr^2}{x} = 16r^2 d(P, F_2)^2; \tag{14}$$
$$P_{m,r}(x) = 16m^2x^2 + \tfrac{16m^2}{x^2} + 16r^4 + 32m^2 + 32mr^2x + \tfrac{32mr^2}{x} - 16r^2 d(P, F_2)^2; \tag{15}$$
$$P_{m,r}(x) = (m^2 - r^2)x^2 + \tfrac{m^2 - r^2}{x^2} + r^4 + 2m^2(1 - r^2) = 0; \tag{16}$$
$$\left.\begin{array}{r} P_{m,r}(1) \Rightarrow (m^2 - r^2) + (m^2 - r^2) + r^4 + 2m^2(1 - r^2) = 0; \\ P_{m,r}(1) \Rightarrow 4m^2 - 2r^2 + r^4 - 2m^2r^2 = 0; \\ P_{m,r}(1) \Rightarrow 4m^2 - 2m^2r^2 = 2m^2(2 - r^2) = 2r^2 - r^4 = r^2(2 - r^2); \\ P_{m,r}(1) \Rightarrow r^2 = 2 \text{ ou } 2m^2 = r^2; m^2 = \frac{r^2}{2}; \\ P_{m,r}(2) \Rightarrow 4(m^2 - r^2) + \frac{m^2 - r^2}{4} + r^4 + 2m^2(1 - r^2) = 0; \\ P_{m,r}(2) \Rightarrow (m^2 - r^2)(17 - 4r^2) + m^2(8 - 4r^2) = 0; \\ P_{m,r}(2) \Rightarrow r^2 = 2 \Rightarrow 9(m^2 - r^2) = 0 \Rightarrow m = \pm r; \\ m^2 = \frac{r^2}{2} \Rightarrow -\frac{r^2}{2}(17 - 4r^2) + \frac{r^2}{2}(8 - 4r^2) = 0; \\ -r^2(17 - 4r^2) + r^2(8 - 4r^2) = 0; \\ r \neq 0 \Rightarrow -(17 - 4r^2) + (8 - 4r^2) = 0; \\ -17 + 4r^2 + 8 - 4r^2 = 0 \Rightarrow 17 + 8 = 0; \end{array}\right\}; \tag{17}$$
$$r^2 = 2 \text{ e } m = \pm r; \tag{18}$$

3.1 Abrindo as contas

Na equação (eq. 8) eu apliquei a definição da hipérbole. Da (eq. 9) até a equação (eq. 16) eu fiz transformações algébricas que me permitiram simplificar na expressão polinomial $P_{m,r}(x) = 0$, um polinômio que depende dos dois parâmetro m, r. Nas equações seguintes eu escrevi

$$\left\{\begin{array}{l} P_{m,r}(1) = 0; \\ P_{m,r}(2) = 0; \end{array}\right. \tag{19}$$

estabelecendo um sistema de 2 equações, tem mais de duas equações mas somente importam as duas últimas para cada um dos valores de x, Elas me permitiram determinar o valor dos parâmetros m, r.

A solução única possível deste sistema é $r = \sqrt{2}, m = \pm\sqrt{2}$ e como não tem sentido que $m = -\sqrt{2}$ então a única solução do sistema é $r = \sqrt{2}, m = r = \sqrt{2}$. É a identidade, na equação (eq. 16), que prova que $y = \frac{1}{x}$ satisfaz à definição da hipérbole. Baseado nela eu escrevi o sistema de equações (eq. 19), que me permitiu encontrar os valores m, r.

Na figura (fig. 4), página 9, eu estou salientando *o triângulo formado pelos focos e um ponto P* genérico sobre a hipérbole. Vou voltar a me referir a *este triângulo.*

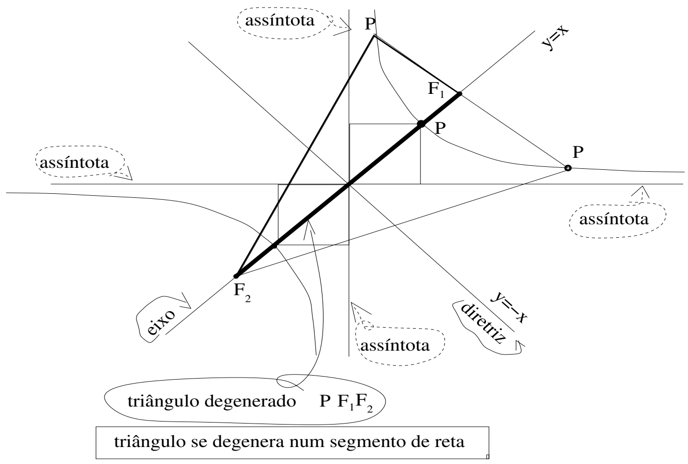


Figure 4: A hipérbole padrão

Confira a figura (fig. 4), página 9, nela há a informação sobre as `imagens da diretriz do cone`, são as `assíntotas`, que neste caso são os eixos coordenados do plano XOY. A `diretriz do cone` é uma reta que roda em volta do `eixo do cone` fixa a um ponto V que se chama de `vértice do cone` e a figura "*captou*" dois `momentos` desta rotação quando a imagem coincide com os eixos OX e OY. Não se esqueça de que o `cone` é gerado pela `diretriz` que está rodando em volta do eixo do `cone` e no plano XOY eu somente percebo o que aparece na figura (fig. 4), as `assíntotas` são duas imagens da `diretriz`.

Na próxima seção vou obter uma nova equação para a hipérbole usando uma transformação geométrica.

4 Obtendo nova hipérbole por transformação

Eu mostrei, na seção anterior, que um tipo de equação, a da curva $y = \frac{1}{x}; x \neq 0$, que vai ser de grande importância no Cálculo, satisfaz à definição de uma hipérbole. Vou usar uma transformação geométrica para obter uma outra equação para a hipérbole, que aparece na figura (fig. 5), página 10.

A figura (fig. 5), página 10 lhe mostra uma hipérbole cujo eixo é o eixo OX, ela foi obtida por uma rotação de $-\frac{\pi}{4}$, ângulo negativo, no sentido da rotação dos antigos ponteiros dos relógios, aplicada na *hipérbole padrão.*

Eu vou obter a equação desta hipérbole aplicando uma rotação com o ângulo, $\frac{-\pi}{4}$, na equação da *hipérbole padrão*, o que significa que vou aplicar a *matriz de rotação* que corresponde ao ângulo $-\frac{\pi}{4}$ no vetor,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; y = \frac{1}{x}; x \neq 0; \tag{20}$$

A frase está incorreta! Não se aplicam rotações em *equações*, se aplicam rotações em *objetos geométricos* porque uma rotação é *uma operação geométrica*. Estou usando uma *metonímia*, uma figura de linguagem em que se substitui o *fato* pelo *efeito*, e a linguagem fica mais simples e reduzida.

Vou aplicar a mesma transformação linear no eixo da *hipérbole padrão* e assim obter os focos na nova hipérbole que vão ser obtidos pela mesma transformação linear junto com o eixo.

Não confunda a o eixo da `hipérbole` com o eixo do `cone`. O eixo da `hipérbole` é a reta determinada pelos dois focos F_1, F_2. Infelizmente a notação é confusa, mas agora a `hipérbole` é um

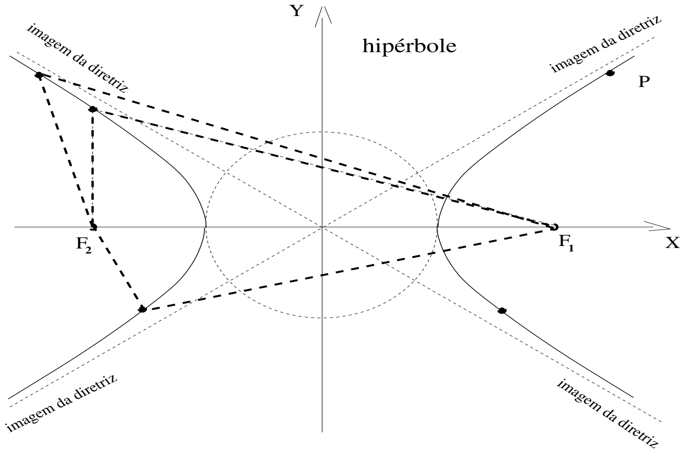


Figure 5: hipérbole com suas assíntotas

objeto separado que foi produzido pela interseção dum plano, no espaço $\mathbf{R}^3$ com um cone e foi projetada no plano XOY e é deste objeto que estou tratando. Esqueça o `cone` que foi usado apenas para produzir `hipérboles`! Mas quando me referir aos elementos do cone, vou manter o *genitivo*, "*do cone*" para alertá-lo da diferença dos conceitos.

As matrizes quadradas 2×2 são transformações do plano no plano, e se tiverem determinante diferente de zero são transformações inversíveis, e é o caso das matrizes de rotação:

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}; \approx e^{i\theta}; \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{vmatrix} = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1; \tag{21}$$

$$\theta = -\frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \cos(-\frac{\pi}{4}) & -\sin(-\frac{\pi}{4}) \\ \sin(-\frac{\pi}{4}) & \cos(-\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} \approx e^{-i\frac{\pi}{4}}; \cos^2(-\frac{\pi}{4}) + \sin^2(-\frac{\pi}{4}) = 1; \tag{22}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(-\frac{\pi}{4}) & -\sin(-\frac{\pi}{4}) \\ \sin(-\frac{\pi}{4}) & \cos(-\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}; \tag{23}$$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \approx a + bi; a^2 + b^2 \neq 0; \tag{24}$$

Apenas para comparar, e se você quiser aprofundar um pouco usando *números complexos*, a primeira matriz é equivalente ao número complexo $e^{i\theta}$, porque multiplicar qualquer número complexo z por este número produz uma rotação de θ em z. Fazer esta conta com números complexos é uma forma de provar que as matrizes nas equações (eq. 21) e (eq. 22) são matrizes de rotação que transformam qualquer *objeto* do plano, $\mathbf{R}^2$, noutro objeto obtido por uma rotação de ângulo θ no primitivo.

A última matriz (eq. 24) é "equivalente" ao número complexo $a+bi$ e eu costumo chamá-la de *matriz de Cauchy-Riemann*, guarde o nome para quando você avançar mais em Matemática quando verá que tenho razão em chamá-la assim. Ficou curiosa, faça uma busca com a palavra-chave *Cauchy-Riemann*, mas não fique assustada, por enquanto é apenas uma denominação!

Do *ponto de vista geométrico* $\mathbf{R}^2 = \mathbf{C}$, *do ponto de vista algébrico* são dois conjuntos bastante diferentes, $\mathbf{C}$ é uma *super álgebra* de $\mathbf{R}$ no sentido de que é uma álgebra que contém $\mathbf{R}$ como subálgebra e você verá mais a frente que há diversas distinções entre $\mathbf{R}^2 = \mathbf{C}$. Mas por enquanto eu me contento em pensar que $\mathbf{R}^2, \mathbf{C}$ são duas formas diferentes de ver o mesmo conjunto, mas estou errado!

Faça as contas, verifique as matrizes do tipo da matriz que aparece na equação (eq. 21) têm determinante 1 e todo número complexo da forma $e^{i\theta}$ têm módulo 1, são pontos do círculo trigonométrico como subconjunto de $\mathbf{C}$, pela *fórmula de Euler-Abraham de Moivre*.

A matriz equivalente ao número complexo $w = a + bi$ generaliza o caso dos números complexos unitários, se $|w| = 1$ tem-se uma simples rotação, se $0 < |w| < 1$ ou $|w| > 1$ haverá também uma distorção em grandeza que não vai alterar a natureza do objeto geométrico, desde que $|w| \neq 0$ o que para as *matrizes de Cauchy-Riemann* é equivalente a dizer que o determinante é diferente de zero devido à equivalência delas com o número complexo $a + bi$.

Esta afirmação é muito forte, ela está lhe dizendo que há um *subconjunto próprio das matrizes* 2×2 que são equivalentes ao conjunto dos números complexos, as *matrizes de Cauchy-Riemann*. Estudando *Álgebra* vai você vai encontrar isto sob o título de *isomorfismo* de $\mathbf{C}$ com este subconjunto próprio de matrizes. Como você pode somar e multiplicar matrizes, e há diversas linguagens de programação que sabem fazer estas operações com matrizes, você tem nas *matrizes de Cauchy-Riemann* uma forma de *representar* $\mathbf{C}$ dentro de programas de computação.

As matrizes nas equações (eq. 21) (eq. 22) , tem a forma duma *matriz de Cauchy-Riemann* porque eu posso a qualquer momento, nas contas, substituir a, b por $\cos(\theta), \sin(\theta)$ e estarei de volta numa matriz de rotação.

Como quero obter uma *hipérbole específica* obtida por rotação de $\theta = \frac{-\pi}{4}$ de modo que o eixo da hipérbole seja o eixo OX então eu vou usar a matriz de rotação com $\theta = \frac{-\pi}{4}$, Já sei que o *objeto* que vou obter é uma hipérbole, porque é um novo objeto obtido por rotação da *hipérbole padrão*, e quero chegar à equação desta nova hipérbole. Vou usar a matriz de rotação

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}; \theta = \frac{-\pi}{4} \tag{25}$$

Vou aplicar a matriz da equação (eq. 25) ao conjunto dos pontos do plano, vetores, da forma $P = (x, \frac{1}{x})$, escritos como *vetor coluna* para que o produto entre matrizes seja legal. Observe que $P = (x, \frac{1}{x}); x \neq 0$ são os pontos que pertencem à *hipérbole padrão*.

$$MP = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{x} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{x} \end{pmatrix} =: P; \tag{26}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}m + \frac{\sqrt{2}}{2}m \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}m + \frac{\sqrt{2}}{2}m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} =: F_1; \tag{27}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -m \\ -m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2}m - \frac{\sqrt{2}}{2}m \\ \frac{\sqrt{2}}{2}m - \frac{\sqrt{2}}{2}m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} =: F_2; \tag{28}$$

O símbolo ":=" foi uma invenção do professor suíço *Niklaus Wirth* dentro da sua construção da *linguagem de programação* `Pascal` em que ele substituiu a *confusa igualdade*, em programação, pelo conceito matemático "*recebe*" que é como se deve ler este símbolo em programação. Algumas linguagens de programação aderiram à invenção de *Niklaus Wirth*. Eu estou generalizando o uso colocando os dois pontos do lado da variável que *recebe* o valor, mas a invenção é do *Wirth*.

`python` adere à sintaxe do `C` e não usa a invenção de *Wirth*.

Apliquei a mesma rotação ao eixo da hipérbole que carrega consigo os focos portanto tenho novos focos, $F_1 = (2, 0), F_2 = (-2, 0)$, porque quero obter uma hipérbole cujo eixo seja OX então, nas equações (eq. 27) (eq. 28) eu calculei as coordenadas dos novos focos. Observe que os focos "*antigos*" eram $F_1 = (\sqrt{2}, \sqrt{2}), F_2 = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ e a distância entre eles é 4, a mesma distância entre os "*novos focos*", nenhuma coincidência, eu apliquei a rotação de $\frac{-\pi}{4}$ ao segmento de reta que eles determinam obtendo outro segmento de reta com mesmo comprimento. Nada extraordinário, apenas chamo sua atenção para que se dê contas de que estou trabalhando com uma nova hipérbole que é idêntica à anterior apenas transformada por uma rotação. Todas as propriedades geométricas são preservadas na transformação.

A diferença entre as distâncias vai ser, como no caso da *hipérbole padrão*,

$$2r = 2\sqrt{2} \leq 4 = d(F_1.F_1); \tag{29}$$

os valores são os mesmo porque esta hipérbole foi obtida pela rotação de $-\frac{\pi}{4}$ aplicada na *hipérbole padrão* e consequentemente as constantes geométricas são mantidas. Continuo lembrando o teorema da desigualdade elementar da geometria já citada anteriormente, $d(F_1.F_2)$ é maior do que o comprimento do *terceiro lado do triângulo degenerado* que é igual a diferença entre os outros dois lados, a distância entre os focos. Sei quais são os focos, agora vou calcular os pontos (x, y) que satisfazem à definição da hipérbole para os focos dados.

$$\{(x, y) = P; d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2r = 2\sqrt{2};\}; \tag{30}$$
$$d(P, F_1) = d((x, y), (2, 0)) = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}; \tag{31}$$
$$d(P, F_2) = d((x, y), (-2, 0)) = \sqrt{(x+2)^2 + y^2}; \tag{32}$$
$$(\forall P)\left(|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2\sqrt{2}\right); \tag{33}$$
$$d(P, F_1) = \pm 2\sqrt{2} + d(P, F_2); \tag{34}$$
$$d(P, F_1)^2 = 8 \pm 4\sqrt{2}d(P, F_2) + d(P, F_2)^2; \tag{35}$$
$$(x-2)^2 + y^2 - d(P, F_2)^2 - 8 = \pm 4\sqrt{2}d(P, F_2); \tag{36}$$
$$(x-2)^2 + y^2 - ((x+2)^2 + y^2) - 8 = \pm 4\sqrt{2}d(P, F_2); \tag{37}$$
$$-8x - 8 = \pm 4\sqrt{2}d(P, F_2) \;\Rightarrow\; 64x^2 + 128x + 64 = 32((x+2)^2 + y^2); \tag{38}$$
$$64x^2 + 128x + 64 = 32x^2 + 128x + 128 + 32y^2; \tag{39}$$
$$2x^2 + 4x + 2 = x^2 + 4x + 4 + y^2 \;\Rightarrow\; x^2 - 2 - y^2 = 0; \tag{40}$$
$$x^2 - 2 - y^2 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 - y^2 = 2 \;\Rightarrow\; y^2 = 2 - x^2; \tag{41}$$
$$\left.\begin{array}{r} 2 - x^2 \geq 0 \;\Leftarrow\; \Rightarrow\; x \leq -\sqrt{2} \text{ ou } x \geq \sqrt{2}; \\ f(x) = \sqrt{2 - x^2} \;\Leftarrow\; |x| \geq \sqrt{2}; \\ f(x) = 0 \;\Leftarrow\; |x| \leq \sqrt{2}; \\ g(x) = -f(x); \end{array}\right\}; \tag{42}$$

4.1 As contas

Na última equação eu defini uma função a partir da equação da hipérbole para usá-la no `gnuplot` e agora dentro do `gnuplot` eu traduzi

```
f(x)= (x < -sqrt(2))?sqrt( x**2  - 2 ):(x < sqrt(2))?0:sqrt( x**2  - 2);
g(x) = -f(x);
plot f(x), g(x), 0, x, -x
pause -2 'aperte enter para terminar' ;
```

e você pode raspar e colar num terminal do `gnuplot` para ver a imagem na figura (fig. 6), página 13,

Para obter a equação de qualquer hipérbole basta usar os `focos` que forem dados e a diferença entre as distâncias dum ponto genérico $P(x, y)$ aos focos, foi o que fiz da equação (eq. 30) até a equação (eq. 41). Na última equação (eq. 42), eu defini uma função obter o gráfico da `hipérbole equilátera` com `gnuplot`. O radical tem que ser positivo o que implica que $|x| > \sqrt{2}$ então no intervalo $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ não tem gráfico, para evitar que `gnuplot` se confundisse, eu defini como zero os valores neste intervalo

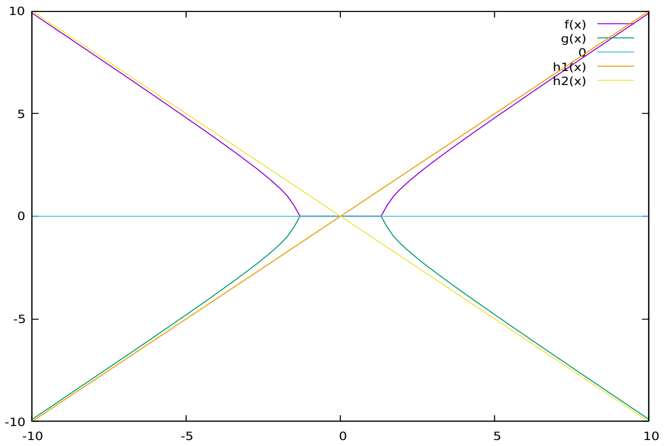


Figure 6: Hipérbole equilátera

fazendo com `gnuplot` desse à função o valor zero, confundindo com o eixo OX, produzindo um gráfico bonito.

Eu usei um `if/else` compacto do `gnuplot` que é importado da *linguagem de programação* `C` em que "?" corresponde a uma pergunta sobre uma variável lógica, no caso uma desigualdade, que sendo verdadeira corresponde a expressão que lhe segue, ":" é alternativa, "`else`", e você pode escrever sentenças imensas com este `if/else` compacto. Aqui estou usando apenas dois `elses` para definir como 0 o valor da função no intervalo $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. A função $-g(x)$ vai me dar a simétrica desta função em relação ao eixo OX foi o que eu obtive com `gnuplot`. Além disto eu tracei as retas $y = \pm x$ que são as `assíntotas` desta hipérbole. O comando `pause -2` faz com que `gnuplot` fique aguardando uma entrada de dados, basta acionar o "enter" e o gráfico sai do ar. É melhor usar o comando

```
pause -2 'aperte enter para terminar' ;
```

para que `gnuplot` emita esta mensagem afim de que o usuário saiba o que fazer para terminar trabalho!

4.2 Outras equações para hipérbole

Por simetria a equação

$$y^2 - x^2 = 2; \tag{43}$$

é a equação da `hipérbole equilátera` com focos $F_1 = (0, 2), F_2 = (0, -2)$ e vértices $v_1 = (0, \sqrt{2}), V_2 = (0, -\sqrt{2})$. As contas são absolutamente semelhantes às que eu fiz na equação (eq. 30) até equação (eq. 41). apenas trocando x por y.

O nome usual para esta hipérbole é `hipérbole equilátera`, como muitos nomes em Matemática este tem um sentido difuso, possivelmente está associado às `assíntotas` que são as duas bissetrizes dos eixos. Com frequência nos textos esta `hipérbole equilátera` é apresentada como um padrão.

As curvas, as cônicas, porque se originam pela interseção dum plano com um cone, são *curvas planas*, porque "pertencem" ao plano que corta o cone, mas foram obtidas no espaço $\mathbf{R}^3$ e projetadas no plano XOY. São estas projeções, *círculo, elipse, hipérbole e parábola*, os objetos da Geometria Analítica.

- A *diretriz do cone* é a reta que gira em torno do *eixo do cone* gerando o cone. Esta reta está "fixa" no ponto O, o vértice do cone e o cone é uma *superfície de revolução* com duas folhas simétricas que se opõem pelo vértice O. A *diretriz* é uma reta que circula em torno do *eixo do cone*, "fixa" no ponto O, gerando o *cone*, e ao cortar este por uma plano eu estarei *captando* duas imagens da *diretriz* em sua passagem pelo plano.

- As imagens da *diretriz do cone*, em dois momentos de sua rotação, projetadas no plano XOY são as duas retas concorrentes num ponto do plano no ponto O' que é a projeção do vértice do cone.

- Eu introduzi uma particularização que não irá prejudicar o desenvolvimento geral da teoria, mas que simplificou as contas. Eu escolhi a origem dos eixos no plano XOY como o ponto de concorrência das imagens da diretriz e do eixo do cone, é o *vértice* do cone.

As imagens da *diretriz do cone*, as projeções no plano XOY, esta projeção se confunde com a própria projeção do cone no no plano XOY, são as assíntotas ao gráfico da hipérbole: quer dizer, o gráfico da hipérbole se aproxima indefinidamente das assíntotas, ou ainda as assíntotas são a "*posição limite*" para a qual tendem os ramos da hipérbole, coisa que Cálculo explica com perfeição com o conceito, "*limite*".

Observe que as duas imagens da diretriz são também uma *hipérbole degenerada*, um conceito *nato do Cálculo* ou das *equações diferenciais*. A Matemática é formada de teorias que dependem uma das outras e trabalhar num departamento como a Geometria Analítica nos força a indicar que os objetos deste departamento aparecem melhor explicados em outros departamentos, aqui, na Geometria Analítica, me falta o conceito "*limite*", que corresponde aos "*objetos degenerados*". Estou fazendo referência a estes conceitos apenas para aguçar a sua curiosidade, eles não serão necessários na sequência da leitura.

As hipérboles têm uma definição da geometria, *é o lugar geométrico dos pontos P tal que, o valor absoluto da diferença entre as distâncias do ponto P a dois pontos chamados focos, é constante*. Compare com a definição da elipse.

Foi escrevendo esta definição sob forma de equações que eu pude obter as equações da *hipérbole padrão* e, agora, da nova hipérbole obtida com a rotação que eu dei à *hipérbole padrão* de $-\frac{\pi}{4}$.

Eu usei uma propriedade da geometria, a *invariância das propriedades das figuras geométricas sob os movimentos rígidos: rotação, translação* para obter uma nova hipérbole a partir da *hipérbole padrão*. Na verdade eu já usei esta propriedade de invariância quando selecionei a origem como ponto de concorrência das imagens da diretriz. Como a Matemática se caracteriza por sua *generalidade*, quer dizer, *os teoremas da Matemática não podem depender de escolhas particulares*, você deve manter uma atitude crítica frente às minhas escolhas e eu tenho o compromisso de mostrar-lhe mais a frente que elas não destroem as equações que vou obter no sentido que elas percam a confiabilidade.

Nas *hipérboles* de que tratei aqui, tudo se passa como se o `eixo do cone` fosse coincidente com o eixo OZ, a primeira bissetriz dos eixos, a reta de equação $y = x$, é o eixo da *hipérbole padrão*.

Na segunda hipérbole, obtida por rotação da *hipérbole padrão* obtive os focos calculando a rotação sobre o eixo da *hipérbole padrão* e assim obter o eixo da nova hipérbole onde se encontram seus focos. Eu produzi uma rotação de $-\frac{\pi}{4}$ levando a reta $y = x$ a coincidir com o eixo OX que é o eixo da nova hipérbole e onde ficam situados os focos da nova hipérbole. Na *hipérbole padrão* os focos tem coordenadas

$$(m, m), (-m, m); m = \sqrt{2};$$

determinando um segmento de reta com vértice cujo comprimento é 4 e as coordenadas dos focos da nova hipérbole tem este valor como *abcissa*.

Isto me permitiu escolher a posição dos referenciais para construir a equação da hipérbole de forma mais simples. No caso da rotação de $-\frac{\pi}{4}$ dada na *hipérbole padrão* eu encontrei a imagem do eixo da nova hipérbole quando apliquei a matriz de rotação sobre os focos da *hipérbole padrão* transformando-lhe o eixo $y = x$ no eixo OX "encontrando", logo m como coordenadas dos focos obtidos dos antigos focos com a rotação do eixo da *hipérbole padrão*. os dois pontos, os focos, $F_1 = (-m, 0) = (-\sqrt{(2)}, 0); F_2 = (m, 0) = (\sqrt{(2)}, 0)$, que são pontos sobre o eixo OX, depois apliquei a definição geométrica para encontrar a equação cartesiana da nova hipérbole.

Quando a hipérbole ficar simétrica em volta da origem dos eixos XOY e seu eixo for OX ou OY, a sua equação equação terá uma das duas formas

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{y2}{B^2} = 1; \frac{y2}{A^2} - \frac{x^2}{B^2} = 1; \tag{44}$$

ao escrever o denominador ao quadrado eu apenas estou indicando que se tratam de dois números positivos que aparecem no denominador.

Variantes da equação da hipérbole padrão são as expressões

$$x = \frac{K}{y}; y = \frac{K}{x}; K \neq 0; \tag{45}$$

a segunda equação terá grande importância no Cálculo.

Index

References

[1] David I. Bell Landon Curt Noll and other. Calc - arbitrary precision calculator. Technical report, http://www.isthe.com/chongo/, 2011.

[2] Tarcisio Praciano-Pereira. *Cálculo Numérico Computacional*. Sobral Matematica, 2007.

[3] Thomas Williams, Colin Kelley, and many others. gnuplot, software to make graphics. Technical report, http://www.gnuplot.info, 2010.