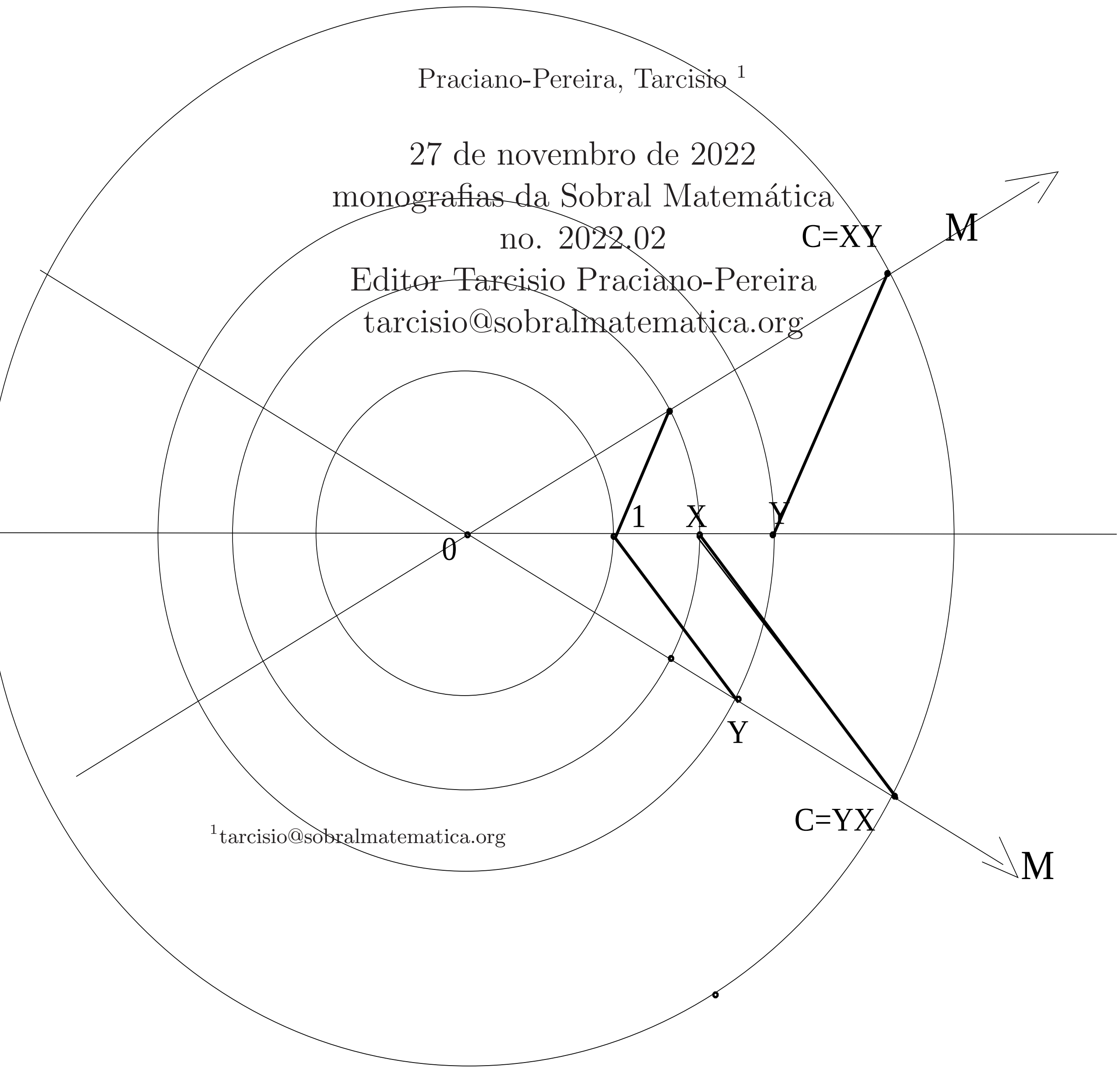
Produto geométrico

Praciano-Pereira, Tarcisio [1]

27 de novembro de 2022
monografias da Sobral Matemática
no. 2022.02
Editor Tarcisio Praciano-Pereira
tarcisio@sobralmatematica.org



[1] tarcisio@sobralmatematica.org

Resumo

Neste trabalho estou ampliando um préprint anterior para discutir todas as propriedades do produto de números reais, usando a multiplicação geométrica. As propriedades do produto saem facilmente da multiplicação geométrica, como o caso $a < 0, b > 0 \quad \Rightarrow \quad ab < 0$ ou $a < 0, b < 0 \quad \Rightarrow \quad ab > 0$. Ele está baseado na equivalência de triângulos.

Usei o editor gráfico `xfig` que me permite gravar o gráfico em vários formatos.

palavras chave: módulo do produto, produto geométrico, propriedades do produto, `xfig`.

It is easy do prove the properties of the product, geometrically. Here you have an overview of the properties of the product including the relations with the inequality. The basic geometric tool is the triangle equivalence. I have used `xfig`, a graphical editor, which allows me to save in several formats.

keywords: absolute value of the product, geometric product, properties of the product, `xfig`.

0.1 Plano do trabalho

Eu publiquei, pela Universidad Austral de Chile, em 1972, a primeira versão do que é hoje *Introdução à Matemática Universitária*, [2], que foi o resultado de minha leitura do livro de Hilbert, [1] que me inspirou num curso que eu estava dando no CEUB, em Brasília, em 1971, quando introduzi os números reais, geometricamente, para alunos da licenciatura em Matemática. Eu estava lendo a tradução americana do livro de Hilbert que apenas sugeria que a *equivalência de triângulos* era uma *definição geométrica* da multiplicação.

Nesta monografia eu mostro. nas diversas seções. como provar as propriedades comutativa e associativa do produto assim como as relações do produto com a desigualdade. O círculo trigonométrico entra como um protagonista especial separando os números segundo o módulo seja maior, igual ou menor do que 1.

O plano do trabalho é o seguinte

- Um exemplo numérico da multiplicação na figura (fig. 1) na primeira seção.
- A multiplicação é comutativa na segunda seção usando a figura (fig. 2).
- A associatividade da multiplicação na terceira seção, mas vou aproveitar a figura anterior.
- A regra dos sinais na multiplicação uma propriedade que dá tanta dor de cabeça para provar usando a figura (fig. 3)

$$a < 0, b > 0 \;\Rightarrow\; ab < 0 \text{ ou } a < 0, b < 0 \;\Rightarrow\; ab > 0; \tag{1}$$

  e que geometricamente fica simples.
- Desigualdade e produto: $c > 0 \;\Rightarrow\; \{a < b \;\Rightarrow\; ac < bc\}$ na figura (4), Nesta seção eu provo que se dois números forem de módulo menor do 1 o produto deles também tem módulo menor do que 1, e mais, o produto tem módulo menor do que o módulo dos multiplicandos.
- Finalmente eu calculo o quadrado de um número na figura (fig. 5).

Estou salvando, como biproduto, o ensino da geometria que assim pode se apresentar como oferecendo alguma coisa positiva!

0.2 Multiplicação geométrica segundo Hilbert

A multiplicação geométrica é baseada na equivalência de triângulos e ajuda muito usar o *círculo trigonométrico* com centro do cenário como mostra a figura (fig. 1), página 2. O círculo trigonométrico também identifica os números $-1, 1$.

Eu tracei a reta M partindo do primeiro para o terceiro quadrante, confira a figura (fig. 1), na qual marquei a semirreta positiva assim como a negativa

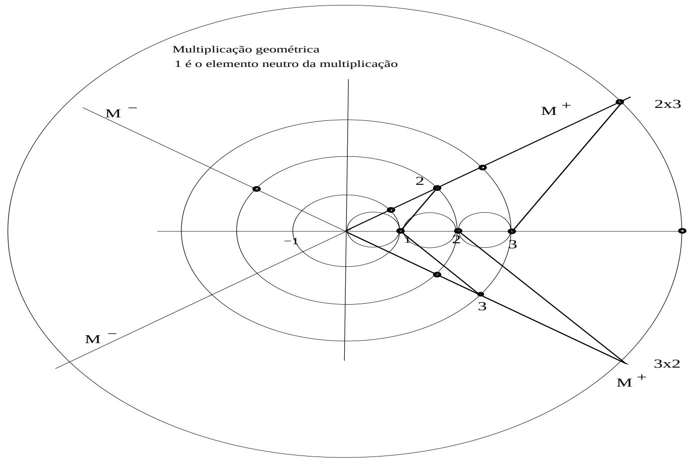


Figura 1: Exemplo numérico da multiplicação

e também desenhei a simétrica da reta M a quem dei o mesmo nome e é em alguma das duas que vou registrar o resultado da multiplicação, daí nome M.

Na figura (fig. 1) eu estou dando-lhe os exemplos

$$2 \times 3, 3 \times 2, -1 \times 2, -1 \times 3; \tag{2}$$

0.2.1 Multiplicação

É preciso adotar uma regra para multiplicar, eu aprendi isto cometendo erros e finalmente cheguei a técnica de fazer uso duma reta onde aparecem os resultados da multiplicação assim como os fatores, que é a reta M. A regra para multiplicar consiste em

- ligar 1 a um dos multiplicandos e depois
- traçar uma paralela a este segmento de reta passando pelo outro multiplicando.

Assim para para obter 2×3, primeiro ligo 1 ao 2 e depois passo uma paralela a este segmento de reta passando por 3. Reverto o processo para obter 3×2 e o fiz usando a reta simétrica da reta M.

Eu deixei na figura (fig. 1) alguns itens que eu usei para marcar as distâncias entre os números, círculos com diâmetro medindo 1.

Mas, exemplos não produzem uma demonstração, então eu vou editar a (fig. 1) para provar que

$$a \times b = b \times a;$$

a *comutatividade da multiplicação*. Acompanhe a figura (fig. 2) na página 3, mostrando que o produto é comutativo. Observe que os triângulos que aparecem na simétrica da reta M são diferentes, exatamente porque foram obtidas pela comutação de a, b.

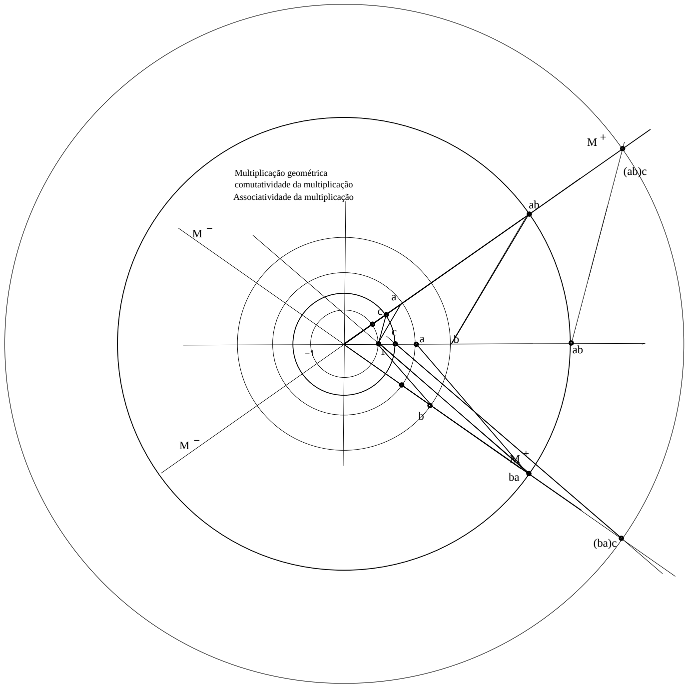


Figura 2: O produto é comutativo

0.3 Associatividade da multiplicação geométrica

O *círculo trigonométrico* dá-me o número 1 disponível para todas as operações. Na mesma figura (fig. 2) eu aproveitei para mostrar a associatividade da multiplicação. Uma vez que eu havia mostrado que $ab = ba$ então eu multipliquei por um número c tanto ab como ba obtendo o mesmo resultado: os triângulos envolvidos são semelhantes e há *dois pares de triângulos semelhantes* dependendo do primeiro fator, ab ou ba.

Eu comecei com o produto ba que provei ser igual ao produto ab que usei depois com o produto $(ab)c$ para deixar tudo numa mesma figura.

Ligando b ao *círculo trigonométrico* e depois passando uma paralela a este segmento passando pelo número a marcado sobre o eixo OX eu vou atingir o círculo de raio ab. Usando simplesmente a simetria, e ligando b ao *círculo trigonométrico*, mas agora abaixo do eixo OX e novamente passando uma paralela a este segmento passando pelo número a encontro o circulo de raio ba o que prova que

$$ab = ba; \tag{3}$$

Agora, aproveitando que ba e ab ligando cada um deles ao 1 sobre eixo OX, e passando uma paralela a qualquer dos dois segmentos eu provei que

$$(ab)c = (ba)c = (ab)c \tag{4}$$

porque já havia provado antes a propriedade comutativa.

O desenho ficou muito cheio e certamente valeria a pena ter editado para obter apenas a associatividade. Mas penso que você deverá verificar as "contas" por sua própria conta e assim poderá refazer os desenhos.

Observação 1 *Técnica de desenho.*
Sugiro uma metodologia de desenho, quando você ligar qualquer número ao 1*, use uma linha mais longa como a que eu deixei ficar ligando ba ao* 1 *porque isto lhe dará mais precisão uma vez que você terá mais distância para verificar o acerto no* 1*, e depois, basta copiar este segmento de reta porque já será uma paralela passando pelo outro fator. Depois eu cobri os segmentos de reta usando uma linha mais grossa e apaguei as linhas auxiliares. Deixei apenas esta ligando ba ao* 1 *para fazer-lhe esta sugestão.*

0.4 Quando os números forem negativos

Talvez este caso seja dos mais interessantes, a troca de sinal quando se multiplica por -1, geometricamente é simples de verificá-lo e algebricamente é bem complicado.

Para o produto entre números negativos, eu editei a figura anterior para obter a figura (fig. 3), página 4,

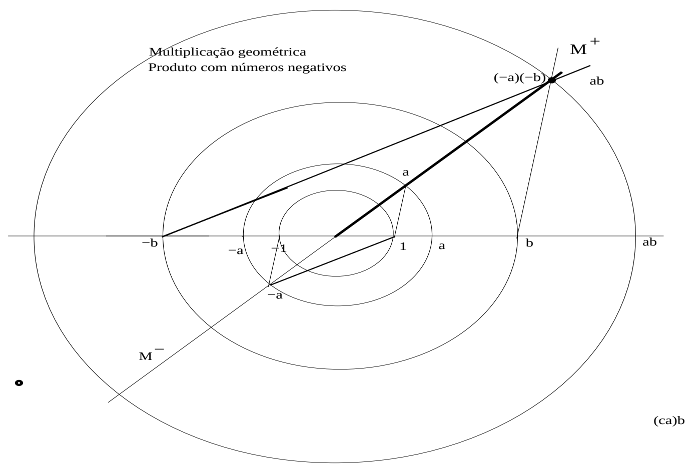


Figura 3: quando tem número negativo na jogada

Nesta figura eu desenhei apenas uma reta M que vai conter os resultados das multiplicações.

Eu preciso encontrar o valor de ab, geometricamente. Primeiro eu multipliquei ab, liguei 1 ao a na reta M que vai conter os resultados da multiplicação e depois passei uma paralela a este segmento de reta passando por b. Usei a técnica já mencionada antes, quando tracei o segmento de reta ligando 1 ao a usei uma segmento de reta de maior comprimento para me dar mais segurança no desenho e também fazer cópia do mesmo para obter a paralela passando por b.

Agora vou multiplicar $(-a)(-b)$ e então liguei 1 ao $-a$ na reta M^- passando então uma paralela a este segmento por $-b$ que vai encontrar o círculo de raio ab no mesmo ponto em que já obtive o produto ab anteriormente com o que provei que

$$(-a)(-b) = ab; \tag{5}$$

geometricamente.

Também passando a paralela ao segmento que liga 1 com a na reta M e depois uma paralela a esta passando pelo -1 vou encontrar $-a$ sobre a reta M o que mostra que multiplicar um número positivo a por -1 retorna um número negativo de mesmo módulo que a porque os dois se encontram também sobre o mesmo círculo de raio a, mas agora $-a$ fica na semirreta negativa M^-. Provei assim que

$$(-1)(a) = -a; \tag{6}$$

Observe que eu escolhi $a > 0, b > 0$ porque o eixo OX está orientado com escolha de 1 então a, b se encontram na semirreta positiva do eixo OX, consequentemente $-a, -b$ são dois números negativos. Finalmente o produto $(-a)(-b)$ se encontra na mesma semirreta em que está ab, a semirreta positiva de M,

A figura (fig. 3) mostra que sendo $a > 0$ então o produto por -1 retorna um número que se encontra na semirreta negativa de M^-.

0.5 Uma propriedade da desigualdade

Vou demonstrar apenas uma propriedade entre desigualdade e multiplicação. Vou provar o caso em que se dois números tiverem módulo menor do que 1 então o produto deles também tem módulo menor do que 1. Este caso é bem interessante pelo uso que faz do *círculo trigonométrico*. Já ficou visível na figura (fig. 2) que se $|a| > 1, |b| > 1$ então $|ab| > 1$ porque todos os números foram escolhidos fora do círculo trigonométrico. Agora, na próxima figura, vou escolher $|a| < 1, |b| < 1$ colocando-os dentro do *círculo trigonométrico*.

A figura (4) página 6, vai lhe mostrar quando eu tiver $|a| < 1, |b| < 1$ então $|ab| < |a|, |ab| < |b|, |ab| < 1$. Por que o círculo de raio $|ab|$ tem por raio um número real menor do que $|a|, |b|, 1$.

Havia um erro aqui observado por um leitor anonimamente, "Por que o círculo de raio $|ab|$ tem por raio um número real menor do que $|ab|, |a|, |b|, 1$.", corrigido!

Como nos casos anteriores, eu tracei a reta ligando 1 ao b e passando por a uma paralela a esta obtendo ab que está dentro de todos os demais círculos sobre a reta M que contém os resultados da multiplicação.

0.6 Elevar um número ao quadrado

Na figura (fig. 5) página 6, eu estou calculando a segunda potência de $a < 1$ e de $b > 1$ e verificando que $a^2 < a$ e que $b^2 > b$. Como anteriormente, liguei 1 ao a passando uma paralela por a para obter a^2 e da mesma forma liguei 1 ao b passando uma paralela por b para obter b^2

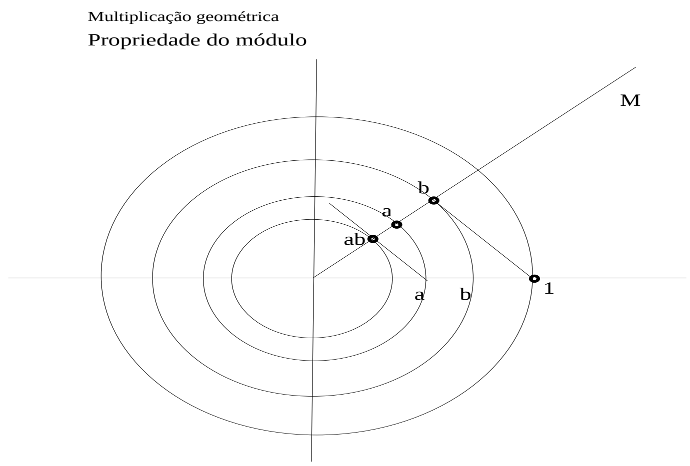


Figura 4: quando $|a| < 1, |b| < 1$

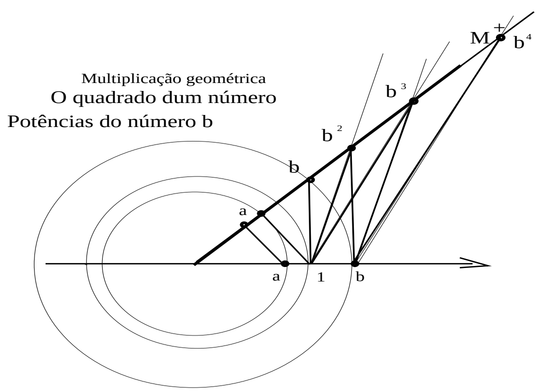


Figura 5: Segunda potência dum número

Calculei b^3, b^4 porque achei divertido mostrar que o módulo cresce rapidamente quando $|b| > 1$.

Penso que se obtém duas vantagens neste processo, primeiro se faz renascer o interesse pela geometria, em particular pela equivalência entre triângulos. A segunda a demonstração da regra dos sinais, na multiplicação feita geometricamente é simples enquanto que a demonstração algébrica é penosa envolvendo alguns artifícios difíceis de se justificar.

Índice Remissivo

Referências Bibliográficas

[1] David Hilbert. *Grundlager der geometri*. B.G. Teubner, 1903.

[2] Tarcisio Praciano-Pereira Stálio Rodrigues dos Santos. *Introdução à Matemática Universitária*. Sobral Matemática, 2009.