A reta numérica

Praciano-Pereira, T

Sobral Matemática
3 de fevereiro de 2015
Textos da Sobral Matemática
Editor Tarcisio Praciano-Pereira,
tarcisio@member.ams.org

- **<u>reta numérica</u>** Se diz duma reta na qual se identificou um ponto como sendo o *zero*, à direita do qual, por convenção se identifica um outro ponto como sendo o 1 como você pode ver na figura (fig 1), página 1,

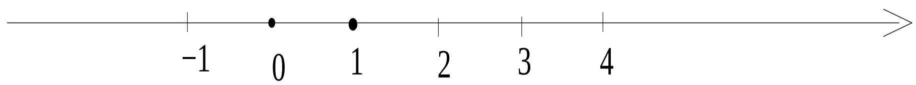

Figura 1: reta numérica, representação geométrica de **R**

A escolha do 1, por convenção, à direita do zero, também define quais são os números positivos e a semi-reta dos números positivos, e consequentemente, também, a semi-reta dos números negativos, à esquerda do zero.

Vou mostrar que é possível fazer-se uma construção geométrica dos números reais portanto a afirmação que aparece na etiqueta da figura (fig 1) está correta, a *reta numérica* é uma representação dos conjunto dos números reais, **R**.

Na figura (fig 2), página 1, você pode ver paralelas à reta que passa por 1,

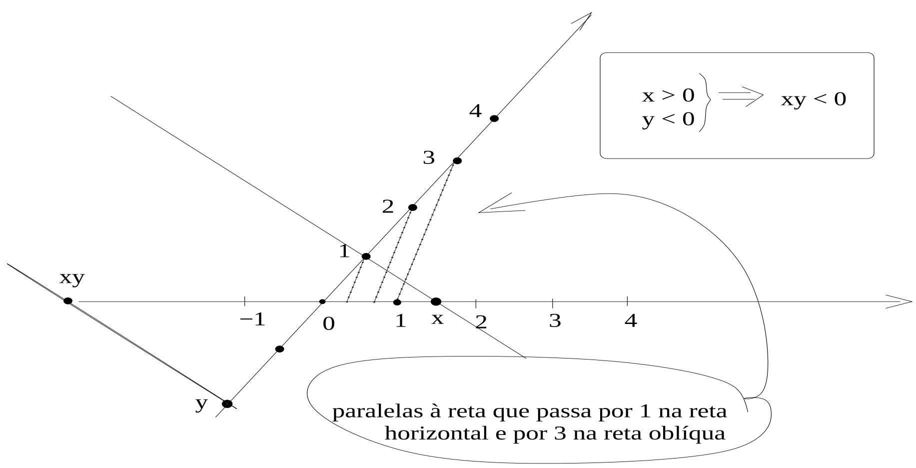

Figura 2: Determinação dos racionais na reta numérica

na reta horizontal e por 3 na reta obliqua permitindo encontramos $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$, na reta horizontal, entre 0 e 1, com relativa exatidão. Da mesma forma, traçando uma reta passando por 1, na horizontal e por um número m qualquer na obliqua, podemos determinar as *frações próprias* de denominador m entre 0 e 1, de volta na reta horizontal. Você pode ver isto na figura (fig 2).

A soma de números, na reta numérica, se faz com soma de segmentos de reta, desta forma temos uma adição geométrica definida na *reta numérica*. Com a soma geométrica podemos expandir a representação de qualquer número racional na reta inteira a partir das frações próprias que acabamos de ver representadas entre 0 e 1. Em suma, qualquer número racional pode ser marcado na *reta numérica* com razoável precisão, usando os métodos do desenho geométrico.

Para fazer a multiplicação podemos usar semelhança de triângulos. Observe a figura (fig 3), página 2.

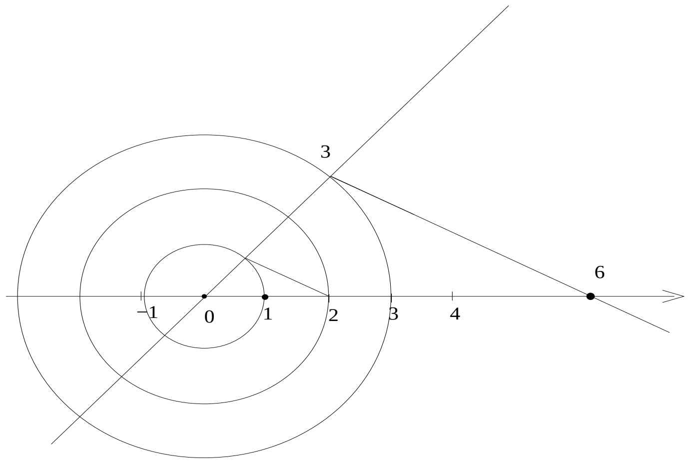

Figura 3: A multiplicação geométrica na reta

Com círculos concêntricos no ponto zero podemos transferir as marcas dos números na reta horizontal para a reta obliqua passando pelo zero. Ligando 2 na reta horizontal com 1 na obliqua, e depois passando uma reta paralela a esta pelo 3 na obliqua, vamos encontrar 6 na horizontal e assim multiplicamos 3 x 2 = 6. Como podemos marcar qualquer número racional nestas retas, então definimos por semelhança de triângulos a multiplicação geométrica na reta.

Tendo adição e multiplicação na reta numérica onde podemos encontrar qualquer número racional nos mostra que temos uma representação geométrica dos números.

Porém na *reta numérica* existem números que não são racionais. A figura (fig 4), página 3, mostra como podemos calcular a $\sqrt{m}; m \in \mathbf{N}$, a raíz quadrada de qualquer número inteiro positivo. Os círculos têm como raio $\sqrt{m}$, o primeiro corresponde à $\sqrt{2}$, o segundo $\sqrt{3}$, o terceiro $\sqrt{4}$. Basta levantar uma perpendicular à reta horizontal, em $\sqrt{m}$, quando ela encontrar a paralela que esta uma unidade acima, você tem o raio que corresponde à próxima raiz $\sqrt{m+1}$.

Isto mostra que qualquer raíz quadrada de número natural pode ser marcada com boa exatidão usando métodos geométricos, na *reta numérica*. Em particular temos $\sqrt{2}$ que não é um número racional, mais exatamente, $\sqrt{2}$ é um número irracional. A demonstração de que $\sqrt{2}$ não é racional é relativamente simples, habitualmente é feita por contradição.

Suponha que $\sqrt{2}$ seja um número racional, então pode ser escrito na forma mais simples:

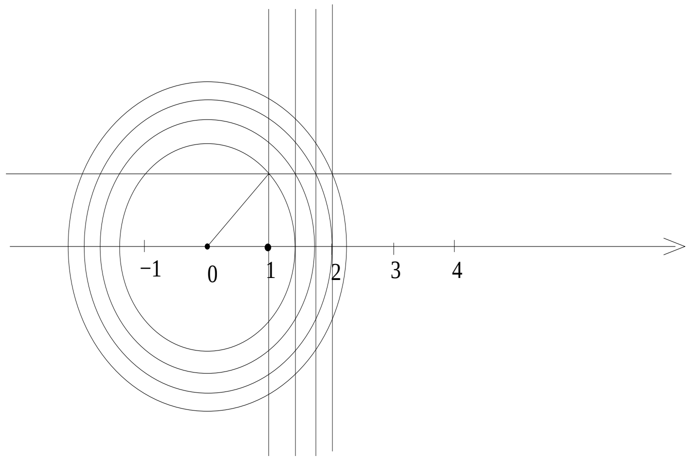

Figura 4: Calculando $\sqrt{m}; m \in \mathbf{N}$

$$\sqrt{2} = \tfrac{p}{q};\ p \text{ e } q \text{ primos entre si;} \tag{1}$$

$$2 = (\tfrac{p}{q})^2 \ \text{ elevando ambos os membros ao quadrado} \tag{2}$$

$$2 = \tfrac{p^2}{q^2} \ \Rightarrow \ 2q^2 = p^2 \tag{3}$$

A conclusão a partir da equação (3) é que p^2 é um número par, como é um número inteiro par e também um quadrado de número inteiro então 2 é fator de p^2 o que mostra que q^2 também é par.

Isto é uma contradição porque partimos da hipótese de que haviamos escrito o número racional $\sqrt{2}$ em sua forma mais simples, com denominador e numerador primos entre si quando agora chegamos à conclusão de que ambos são números pares portanto divisíveis por 2.

A falsidade consiste na hipótese de que seria possível escrever $\sqrt{2}$ como um número racional, portanto $\sqrt{2}$ é irracional.

O mesmo pode ser feito com qualquer raíz de número inteiro cuja raíz não seja um inteiro, é um número irracional, e a conclusão é a de que na *reta numérica* podemos encontrar todos os números racionais e também os irracionais. Como a *reta numérica* é um conjunto de números uma vez que podemos efetuar as quatro operações com os seus elementos, então é um novo conjunto numérico que contém $\mathbf{Q}$, é o conjunto dos números reais.

Este é uma forma geométrica de construir os números reais que vi, pela primeira vez, no livro de Hilbert *Fundamentos da Geometria*. Uma outra forma de construir os números reais se atribui a Cauchy usando o conceito de *sequências de Cauchy*, confira *convergência*.

Você talvez esteja curioso para ver como dividir dois números diferentes de zero. A figura (fig 5), página 4, mostra como fazê-lo. Primeiro calculo $\frac{1}{b}$,

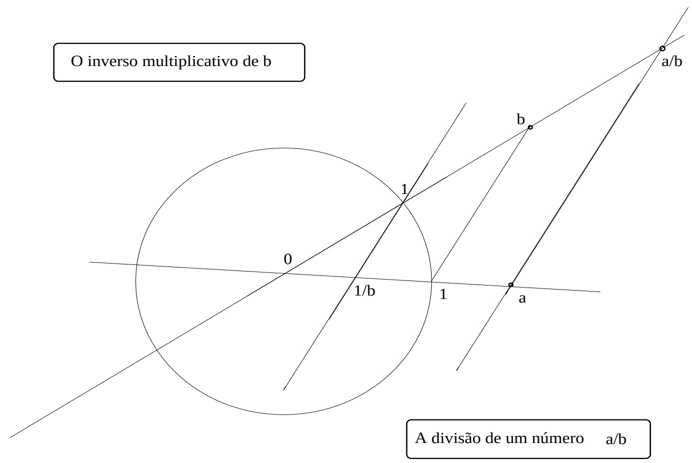

Figura 5: A divisão de um número a por $b \neq 0$

traçando a reta que liga o neutro multiplicativo, 1 com b e uma paralela a ela passando pelo neutro multiplicativo. Agora multiplico $\frac{1}{b}$ por a traçando uma parelala a qualquer dessas retas passando por a.

Alguns resultados são fáceis de serem deduzidos da multiplicação geométrica, como

$$a, b > 0 \quad \Rightarrow \quad ab > 0; \tag{4}$$

$$b > 1 \quad \Rightarrow \quad \tfrac{1}{b} < 1; \tag{5}$$

$$a, b > 1 \quad \Rightarrow \quad ab > 1; \tag{6}$$

$$0 < a < b \text{ e } c > 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < ac < bc; \tag{7}$$

$$a < 0; b < 0 \quad \Rightarrow \quad ab > 0; \tag{8}$$

$$a < 0; b > 0 \quad \Rightarrow \quad ab < 0; \tag{9}$$

para obtê-los observe que “menor do que 1”, em módulo, significa “estar dentro do círculo unitário”, e que o zero divide a reta em duas classes de números: a *semi-reta dos números positivos*, e a *semi-reta dos números negativos*. Na figura (fig 6), página 5, transferi a posição de b para a outra reta usando o compasso e obtive ab na semi-reta negativa: $ab < 0$.

Esta operações geométricas, adição e multiplicação, podem ser generalizadas para obter-se a *álgebra dos números complexos* também definida geométricamente. É interessante que ao fazer esta generalização podemos identificar novamente o conjunto dos números reais como eixo OX do plano complexo e que as operações geométricas de números reais são um caso particular das operações geométricas dos números complexos.

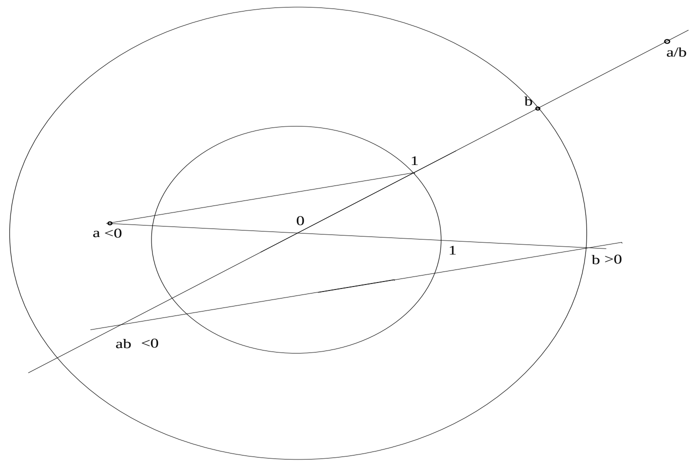

Figura 6: Produto de $a < 0$ por $b > 0$

Referências

[1] Tarcisio Praciano-Pereira Stálio Rodrigues dos Santos. *Introdução à Matemática Universitária*. Sobral Matemática, 2009.