



Matemática Aplicada
 Indução Finita e lógica matemática
 T. Prachiano-Pereira

Lista numero 2
 exercício.prachiano@gmail.com
 Instituto Alencarima

alun@:

25 de junho de 2015
 Produzido com \LaTeX
 Instituto Alencarima
 sis: op. Debian/GNU/Linux
 www.fundamentos.sobralmatematica.org/

Se entregar em papel, por favor, prenda esta folha de rosto na solução desta lista, preenchendo seu nome. Ela será usada na correção.

Exercícios 1 *Indução Finita e lógica matemática*
objetivos, Contagem e Análise Combinatória. Preparando para cálculo de probabilidades. Para calcular probabilidades de eventos preciso saber quantos elementos os eventos tem e isto quer dizer saber quantos elementos tem um subconjunto. As relações lógicas são um auxiliar neste objetivo.
palavras chave: Indução Finita, número de elementos dum conjunto, Análise Combinatória.

1. Números naturais. \mathbb{N}

(a) $(V) \llbracket (F) \rrbracket$ Nem pombal existem n entradas para os pombos e $n + 1$ pombos se ajeitaram no pombal devido às fortes chuvas. Então,

em pelo menos uma das entradas há dois pombos ajeitados.

(b) $(V) \llbracket (F) \rrbracket$ C_n^p é o número de subconjuntos p - n que podemos extrair de $\{1, 2, \dots, n\}$. Então

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad (1)$$

(c) $(V) \llbracket (F) \rrbracket$ A quantidade de subconjuntos que podemos extrair de

$$\{1, 2, \dots, n\} \text{ é } \sum_{p=0}^n C_n^p = 2^n \quad (2)$$

(d) $(V) \llbracket (F) \rrbracket$

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^n C_n^p a^{n-p} b^p \quad (3)$$

(e) $(V) \llbracket (F) \rrbracket$

$$(1+1)^n = \sum_{p=0}^n C_n^p = 2^n \quad (4)$$

2. *Divisibilidade, algoritmo da divisão euclidiana* Quando dividimos dois números usamos o algoritmo de divisão euclidiana que relaciona quatro números inteiros: dividendo p , divisor d , quociente q e resto r .

Considere que estamos dividindo p por d , dividendo e divisor. Então

(a) $(V) \llbracket (F) \rrbracket$ O quociente, q é sempre menor do que o divisor d

(b) $(V) \llbracket (F) \rrbracket$ Se o resto for então $r < p$, (o resto, r , é menor do que o dividendo, p).

(c) $(V) \llbracket (F) \rrbracket$ Quando a divisão for exata o resto será igual p .

(d) $(V) \llbracket (F) \rrbracket$ Se o dividendo p , for múltiplo do divisor, então $q = 1$, (o quociente é igual a 1).

(e) $(V) \llbracket (F) \rrbracket$ Se p for o dividendo, d o divisor, q o quociente então existe um número positivo r , menor do que quociente, tal que

$$p = dq + r; r \leq d, 0 \leq r < d \quad (5)$$

3. *Indução Finita e lógica matemática*

"Os negócios vão mal e os preços dos produtos estão altos", é uma frase composta do tipo $A \cap B$ em que A, B representam subsentenças:

- A = Os negócios vão mal;
- B = os preços dos produtos estão altos

Posso dizer que $A \cap B$ é a formalização matemática da frase "Os negócios vão mal e os preços dos produtos estão altos" usando teoria dos conjuntos e também poderia fazê-lo usando lógica matemática, escrevendo " A e B ".

Confira as "traduções das sentenças" nas alternativas seguintes, indicando quando forem verdadeiras ou falsas. *Atenção: A linguagem coloquial completa o conteúdo das sentenças em "básicas frases"!*

Nas frases seguintes, "João" e "Antônio" são nomes fictícios e qualquer semelhança com a realidade é pura coincidência. Use como sentenças básicas:

$$A = \text{"João produz mais do que Antônio"}; \quad (6)$$

$$B = \text{"João ganha mais do que Antônio"} \quad (7)$$

- (a) $\underline{[V]} \downarrow \underline{[F]} \downarrow \downarrow$ "João nem produz mais do que Antônio nem tem rendimentos superiores aos de Antônio" se traduz por $(A \text{ ou } B)$.
- (b) $\underline{[V]} \downarrow \underline{[F]} \downarrow \downarrow$ "O salário de João e a produtividade de João são mais baixos que os de Antônio" se traduz por $(\text{não } A \text{ e não } B)$.
- (c) $\underline{[V]} \downarrow \underline{[F]} \downarrow \downarrow$ "João nem produz mais e nem ganha mais do que Antônio" se traduz por $(\text{não } A \text{ e não } B)$.
- (d) $\underline{[V]} \downarrow \underline{[F]} \downarrow \downarrow$ "Não é verdade que João produza mais do que Antônio e João ganhe mais do que Antônio" se traduz por

$$(\text{não } A \text{ e não } B) \text{ é falsa ;} \quad (8)$$

- (e) $\underline{[V]} \downarrow \underline{[F]} \downarrow \downarrow$ "João não produz mais do Antônio mas João não ganha mais do Antônio" se traduz por $(\text{não } A) \text{ e } (\text{não } B)$.

4. Indução Finita e lógica matemática

- (a) $B =$ os preços estão subindo ; $A =$ os preços estão altos ; (9)
- (b) $\underline{[V]} \downarrow \underline{[F]} \downarrow \downarrow$ então $A \cap B$ seria equivalente a os preços estão altos ou continuam subindo. (10)
- (c) $\underline{[V]} \downarrow \underline{[F]} \downarrow \downarrow$ então $A \cup B$ seria equivalente a os preços estão altos ou continuam subindo.
- (d) $\underline{[V]} \downarrow \underline{[F]} \downarrow \downarrow$ então $A \cap B$ seria equivalente a os preços estão altos e continuam subindo.
- (e) $\underline{[V]} \downarrow \underline{[F]} \downarrow \downarrow$ então $A^c \cup B$ seria equivalente a os preços não estão altos ou continuam subindo.
- (f) $\underline{[V]} \downarrow \underline{[F]} \downarrow \downarrow$ então $A^c \cup B^c$ seria equivalente a os preços não estão altos ou não continuam subindo.

5. Permanença Sobre o Eclipse Solar de 15 de Março

"Within 30 minutes the solar power production would decrease from 17.5 gigawatts to 6.2GW and then increase again up to 24.0GW. This means that within 30 minutes the system will have to adapt to a load change of -10GW to +15GW", said Patrick Gruchten, *creative director of the Berlin-based think-tank on renewable energy* Agora.Energie, as cited by the Financial Times.

"Em 30 minutos a produção de energia solar vai cair de 17,5 gigawatts gigawatts para 6,2GW e (duas horas depois) crescer para 24,0GW. Isso significa que em 30 minutos o sistema tem que se adaptar para uma alteração na carga de -10GW a +15GW", disse Patrick Gruchten, diretor executivo da massa pensante sobre energia renovável baseada em Berlin, Agora.Energie, numa citação do Financial Times.

Em percentual, a queda de energia provocada pelo eclipse, na Inglaterra será de:

- (a) $\underline{[V]} \downarrow \underline{[F]} \downarrow \downarrow$ 0.35428571428571428571%
- (b) $\underline{[V]} \downarrow \underline{[F]} \downarrow \downarrow$ 0.45428571428571428571%
- (c) $\underline{[V]} \downarrow \underline{[F]} \downarrow \downarrow$ 0.5428571428571428571%
- (d) $\underline{[V]} \downarrow \underline{[F]} \downarrow \downarrow$ 0.71428571428571%
- (e) $\underline{[V]} \downarrow \underline{[F]} \downarrow \downarrow$ 0.64571428571428571429%

6. Indução Finita e lógica matemática

- (a) $\underline{[V]} \downarrow \underline{[F]} \downarrow \downarrow$ A soma dos termos da progressão aritmética 1, 2, 3, ..., n é $\frac{n(n+1)}{2}$.
- (b) $\underline{[V]} \downarrow \underline{[F]} \downarrow \downarrow$ A soma dos termos da progressão aritmética n, 2n, 3n, ..., na é $\frac{n^2(n+1)(n+2)}{2}$.
- (c) $\underline{[V]} \downarrow \underline{[F]} \downarrow \downarrow$ A soma dos termos da progressão aritmética n, 2n, 3n, ..., na é $\frac{n(n+1)(n+2)}{2}$.
- (d) $\underline{[V]} \downarrow \underline{[F]} \downarrow \downarrow$ A soma dos termos da progressão a, a^2, a^3, \dots, a^n é $a \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$.
- (e) $\underline{[V]} \downarrow \underline{[F]} \downarrow \downarrow$ A soma dos termos da progressão a, a^2, a^3, \dots, a^n é $a \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$.

7. Tabela da verdade. Se A, B forem duas sentenças, esta é a tabela da verdade

A	B	A e B	A ou B
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

das sentenças $(A \text{ e } B)$, $(A \text{ ou } B)$,

Os símbolos lógicos \wedge, \vee, \neg são usados significando, respectivamente: e, ou, ou-exclusivo. O $\underline{[V]} \downarrow \underline{[F]} \downarrow \downarrow$ corresponde a $(A \cup B) = (A \cap B)$. Observe o "reverso" da semelhança do $\underline{[V]} \downarrow \underline{[F]} \downarrow \downarrow$ com a desigualdade \leq ; nesta vale tanto $<$ como $=$. O $\underline{[V]} \downarrow \underline{[F]} \downarrow \downarrow$ é "ou-exclusivo".

A	B	$A \cup B$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

- (a) $\underline{[V]} \downarrow \underline{[F]} \downarrow \downarrow$ A tabela de verdade do ou-exclusivo é
- (b) $\underline{[V]} \downarrow \underline{[F]} \downarrow \downarrow$ O "ou exclusivo" é a negação da "e".
- (c) $\underline{[V]} \downarrow \underline{[F]} \downarrow \downarrow$ A tabela de verdade de não $(A \text{ e } B)$ é

A	B	não (A e B)
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

A	B	(A ou não B)
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

(d) $(V) / [(F)] / A$ tabela de verdade (A ou não B) é

(e) $(V) / [(F)] / A$ implicação lógica $(B \Rightarrow A)$, por definição, é equívoca.

A	B	B \Rightarrow A
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

lente a (A ou não B). Então a sua tabela de verdade será

Conclusão: a premissa, ou hipótese, B, pode ser falsa mas a implicação pode ser verdadeira.

8. Indução Finita e lógica matemática

Uma pessoa tem 9 cédulas totalizando 100 reais.

- (a) $(V) / [(F)] / Ela$ tem no máximo 4 cédulas de vinte
- (b) $(V) / [(F)] / Ela$ não tem cédulas de dois, nem de cinco e nem de 10.
- (c) $(V) / [(F)] / Ela$ tem cédulas de vinte, de cinco e de dez reais.
- (d) $(V) / [(F)] / Ela$ não tem cédulas de vinte.
- (e) $(V) / [(F)] / Ela$ tem no máximo 4 cédulas de vinte reais.

9. Indução Finita e lógica matemática Quero encontrar a fórmula para soma dos quadrados:

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \sum_{k=0}^n p(k) = P(n+1) - P(0) \quad (11)$$

em que $p(k) = k^2$. A semelhança com a soma dos termos dum a. p. a. que é uma sucessão do primeiro grau, cuja soma é dada por uma expressão do segundo grau, a soma dos quadrados se expressa com um polinômio do terceiro grau.

$$P(x) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (12)$$

(a) $(V) / [(F)] / Verificamos$ se P é o polinômio adequado fazendo três teste: P(1), P(2), P(3).

(b) $(V) / [(F)] / Escolhemos$ um número n muito grande e verificamos se P(n) corresponde ao resultado da soma obtida com um programa de computador.

(c) $(V) / [(F)] / Se$ P estiver correto, isto pode ser verificado com quatro testes: P(1), P(2), P(3), P(4), que, se verificarem corretos, comprova que o polinômio escolhido é o adequado.

(d) $(V) / [(F)] / Para$ verificar se P é o polinômio correto é preciso

- Fazer um teste com um número inicial, no;
- estabelecer que por hipótese vale para $n = k$;
- verificar a implicação $P(k) \Rightarrow P(k+1)$;
- e isto é que caracteriza uma demonstração por indução.

(e) $(V) / [(F)] / Não$ é possível calcularmos a soma dos quadrados para um valor dado de n na expressão

$$S_n = \sum_{k=0}^n k^2 \quad (13)$$

10. Indução Finita e lógica matemática

Joguet dois dados.

(a) $(V) / [(F)] / A$ soma dos números nas faces que ficaram para cima é 20.

(b) $(V) / [(F)] / A$ soma dos números nas faces que ficaram para cima pode ser 20.

(c) $(V) / [(F)] / A$ soma dos números nas faces que ficaram para cima pode ser 1.

(d) $(V) / [(F)] / A$ soma dos números nas faces que ficaram para cima pode ser 2.

(e) $(V) / [(F)] / A$ soma dos números nas faces que ficaram para cima é $\frac{2}{2}$.