Matemática Aplicada | **Lista numero 2**
Indução Finita e lógica matemática | tarcisio.praciano@gmail.com
T. Praciano-Pereira | **Instituto Alencarina**

alun@:

25 de junho de 2015	**Instituto Alencarina**
Produzido com LaTeX	sis. op. Debian/GNU/Linux
	`www.Fundamentos.sobralmatematica.org/`

Se entregar em papel, por favor, prenda esta *folha de rosto* na solução desta lista, preenchendo seu nome. Ela será usada na correção.

Exercícios 1 *Indução Finita e lógica matemática*
objetivo: *Contagem e Análise Combinatória. Preparando para cálculo de probabilidades. Para calcular probabilidades de eventos preciso saber quantos elementos os eventos tem e isto quer dizer saber quantos elementos tem um subconjunto. As relações lógicas são um auxiliar neste objetivo.*
palavras chave: Indução Finita, número de elementos dum conjunto, Análise Combinatória.

1. *Números naturais,* $\mathbf{N}$

   (a) *(V)[ ](F)[ ] Num pombal existem n entradas para os pombos e $n+1$ pombos se agasalharam no pombal devido às fortes chuvas. Então, em pelo menos uma das entradas há dois pombos agasalhados.*

   (b) *(V)[ ](F)[ ] C_n^p é o número de subconjuntos p-a-p que podemos extrair de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Então*

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} \tag{1}$$

   (c) *(V)[ ](F)[ ] A quantidade de subconjuntos que podemos extrair de $\{1, 2, \ldots, n\}$ é*

$$\sum_{p=0}^{n} C_n^p = 2^n \tag{2}$$

(d) <u>(V)[ ](F)[ ]</u>

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p \tag{3}$$

(e) <u>(V)[ ](F)[ ]</u>

$$(1+1)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p = 2^p \tag{4}$$

2. <u>*Divisibilidade, algoritmo da divisão euclidiana*</u> *Quando dividimos dois inteiros usamos o* algoritmo da divisão euclidiana *que relaciona quatro números inteiros: dividendo p, divisor d, quociente q e resto r.*

   Considere que estamos dividindo p por d, dividendo e divisor. Então

   (a) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *O quociente, q é sempre menor do que o divisor d*

   (b) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *Se o resto for r então $r < p$, (o resto,r, é menor do que o dividendo,p).*

   (c) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *Quando a divisão for exata o resto será igual p.*

   (d) <u>(V)[ ](F)[ ]</u>*Se o dividendo p, for múltiplo do divisor, então $q = 1$, (o quociente é igual a 1).*

   (e) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *Se p for o dividendo, d o divisor, q o quociente então existe um número positivo r, menor do que quociente, tal que*

$$p = dq + r; r \leq 0; 0 \leq r < q; \tag{5}$$

3. <u>*Indução Finita e lógica matemática*</u>

   "Os negócios vão mal e os preços dos produtos estão altos" *é uma frase composta do tipo $A \cap B$ em que A, B representam subsentenças:*

   - A = *Os negócios vão mal;*
   - B = *os preços dos produtos estão altos*

   Posso dizer que $A \cap B$ é a formalização matemática da frase "Os negócios vão mal e os preços dos produtos estão altos" *usando* teoria dos conjuntos *e também poderia fazê-lo usando* lógica matemática" *escrevendo "A e B".*

   Confira as "traduções das setenças" nas alternativas seguintes, indicando quando forem verdadeiras ou falsas. <u>*Atenção:*</u> *A linguagem coloquial complica o contéudo das sentenças em* "belas frases"*!*

   Nas frases seguintes, "João" e "Antônio" são nomes fictícios e qualquer semelhança com a realidade é pura coincidência. Use como sentenças básicas:

$$A = \text{"João produz mais do que Antônio ";} \tag{6}$$
$$B = \text{"João ganha mais do que Antônio "} \tag{7}$$

(a) *(V)[ ](F)[ ]* "João nem produz mais do que Antônio nem tem rendimentos superiores aos de Antônio" *se traduz por (A ou B).*

(b) *(V)[ ](F)[ ]* "O salário de João e a produtividade de João são mais baixos que os de Antônio" *se traduz por (não A e não B).*

(c) *(V)[ ](F)[ ]* "João nem produz mais e nem ganha mais do que Antônio" *se traduz por ((não A e não B)).*

(d) *(V)[ ](F)[ ]* "Não é verdade que João produza mais do que Antônio e João ganhe mais do que Antônio" *se traduz por*

$$(não A \ e \ não B) \ \text{é falsa} \ ; \tag{8}$$

(e) *(V)[ ](F)[ ]* "João não produz mais do Antônio mas João não ganha mais do Antônio" *se traduz por ((não A) e (não B)).*

4. *Indução Finita e lógica matemática*

Se

$$A = \ \text{os preços estão altos} \ ; \tag{9}$$

$$B = \ \text{os preços estão subindo} \ ; \tag{10}$$

(a) *(V)[ ](F)[ ]* *então* $A \cap B$ *seria equivalente a* os preços estão altos ou continuam subindo.

(b) *(V)[ ](F)[ ]* *então* $A \cup B$ *seria equivalente a* os preços estão altos ou continuam subindo.

(c) *(V)[ ](F)[ ]* *então* $A \cap B$ *seria equivalente a* os preços estão altos e continuam subindo.

(d) *(V)[ ](F)[ ]* *então* $A^c \cup B$ *seria equivalente a* os preços não estão altos ou continuam subindo.

(e) *(V)[ ](F)[ ]* *então* $A^c \cup B^c$ *seria equivalente a* os preços não estão altos ou não continuam subindo.

5. *Percentagem* *Sobre o Eclipse Solar de 15 de Março*

"Within 30 minutes the solar power production would decrease from 17.5 gigawatts to 6.2GW and then increase again up to 24.6GW. This means that within 30 minutes the system will have to adapt to a load change of -10GW to +15GW", *said Patrick Graichen, executive director of the Berlin-based think-tank on renewable energy* Agora Energiewende, *as cited by the* Financial Times.

"Em 30 minutos a produção de energia solar vai cair de 17.5 gigawatts gigawatts para 6.2GW e (duas horas depois) crescer para 24.6GW. Isto significa que em 30 minutos o sistema tem que se adaptar para uma alteração na carga de -10GW a +15GW", *disse Patrick Graichen, diretor executivo da* massa pensante *sobre energia renovável baseada em Berlim,* Agora Energiewende, *numa citação do* Financial Times.

Em percentual, a queda de energia provocada pelo eclípse, na Inglaterra será de:

(a) (V)[ ](F)[ ] 0.354285714285714285714%
(b) (V)[ ](F)[ ] 0.454285714285714285714%
(c) (V)[ ](F)[ ] 0.542857142857142857142%
(d) (V)[ ](F)[ ] 0.714285714285714%
(e) (V)[ ](F)[ ] 0.645714285714285714429%

6. *Indução Finita e lógica matemática*

   (a) (V)[ ](F)[ ] *A soma dos termos da progressão aritmética* $1, 2, 3, \ldots, n$ *é* $\frac{(n+1)n}{2}$
   (b) (V)[ ](F)[ ] *A soma dos termos da progressão aritmética* $a, 2a, 3a, \ldots, na$ *é* $\frac{a^2(n+1)n}{2}$
   (c) (V)[ ](F)[ ] *A soma dos termos da progressão aritmética* $a, 2a, 3a, \ldots, na$ *é* $\frac{a(n+1)n}{2}$
   (d) (V)[ ](F)[ ] *A soma dos termos da progressão* $a, a^2, a^3, \ldots, a^n$ *é* $a\frac{a^{n+1}-1}{a-1}$
   (e) (V)[ ](F)[ ] *A soma dos termos da progressão* $a, a^2, a^3, \ldots, a^n$ *é* $a\frac{1-a^{n+1}}{1-a}$

7. *Tabela de verdade Se* A, B *forem duas sentenças, esta é a tabela de verdade das sentenças* $(A$ *e* $B)$, $(A$ *ou* $B)$,

A	B	A *e* B	A *ou* B
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

Os símbolos lógicos $\wedge, \vee, \veebar$ *são usados significando, respectivamente:* e, ou, ou-exclusivo. *O* $\veebar$ *corresponde a* $(A \cup B) - (A \cap B)$.

Observe o "reverso" da semelhança do $\veebar$ *com a desigualdade* $\leq$, *nesta vale tanto* $<$ *como* $=$. *O* $\veebar$ *é* "ou-exclusivo".

   (a) (V)[ ](F)[ ] *A tabela de verdade do* ou-exclusivo *é*

A	B	$A \veebar B$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

   (b) (V)[ ](F)[ ] *O* "ou exclusivo" *é a negação da* " e ".
   (c) (V)[ ](F)[ ] *A tabela de verdade de* não $(A$ *e* $B)$ *é*

A	B	*não* $(A$ *e* $B)$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

(d) *(V)[ ](F)[ ] A tabela de verdade (A ou não B) é*

A	B	$(A$ *ou* *não* $B)$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

(e) *(V)[ ](F)[ ] A implicação lógica* $(B \Rightarrow A)$*, por definição, é equivalente a (A ou não B). Então a sua tabela de verdade será*

A	B	$B \Rightarrow A$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

Conclusão: a premissa, ou hipótese, *B, pode ser falsa mas a implicação pode ser verdadeira.*

8. *Indução Finita e lógica matemática*

   Uma pessoa tem 9 cédulas totalizando 100 reais.

   (a) *(V)[ ](F)[ ] Ela tem no máximo 4 cédulas de vinte*
   (b) *(V)[ ](F)[ ] Ela não tem cédulas de dois, nem de cinco e nem de 10.*
   (c) *(V)[ ](F)[ ] Ela tem cédulas de vinte, de cinco e de dez reais.*
   (d) *(V)[ ](F)[ ] Ela não tem cédulas de vinte.*
   (e) *(V)[ ](F)[ ] Ela tem no mínimo 4 cédulas de vinte reais.*

9. *Indução Finita e lógica matemática Quero encontrar a fórmula para soma dos quadrados:*

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \sum_{k=0}^{n} p(k) = P(n+1) - P(0) \tag{11}$$

em que $p(k) = k^2$*. À semelhança com a soma dos termos duma p.a. que é uma sucessão do primeiro grau cuja soma é dada por uma expressão do segundo grau, a soma dos quadrados se expressa com um polinômio do terceiro grau.*

$$P(x) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \tag{12}$$

(a) *(V)[ ](F)[ ] Verificamos se P é o polinômio adequado fazendo três teste: $P(1), P(2), P(3)$.*

(b) *(V)[ ](F)[ ] Escolhemos um número n muito grande e verificamos se $P(n)$ corresponde ao resultado da soma obtida com um programa de computador.*

(c) *(V)[ ](F)[ ] Se P estiver correto, isto pode ser verificado com quatro testes: $P(1), P(2), P(3), P(4)$, que, se verificarem corretos, comprova que o polinômio escolhido é o adequado.*

(d) *(V)[ ](F)[ ] Para verificar se P é o polinômio correto é preciso*

- *Fazer um teste com um número inicial, n_0;*
- *estabelecer que por hipótese vale para $n = k$;*
- *verificar a implicação $P(k) \Rightarrow P(k+1)$;*

e isto é que caracteriza uma demonstração por indução.

(e) *(V)[ ](F)[ ] Não é possivel calcularmos a soma dos quadrados para um valor dado de n na expressão*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k^2 \tag{13}$$

10. *Indução Finita e lógica matemática*

Joguei dois dados.

(a) *(V)[ ](F)[ ] A soma dos números nas faces que ficaram para cima é 20.*

(b) *(V)[ ](F)[ ] A soma dos números nas faces que ficaram para cima pode ser 20.*

(c) *(V)[ ](F)[ ] A soma dos números nas faces que ficaram para cima pode ser 1.*

(d) *(V)[ ](F)[ ] A soma dos números nas faces que ficaram para cima pode ser 2.*

(e) *(V)[ ](F)[ ] A soma dos números nas faces que ficaram para cima é 2.*