Exercícios de Cálculo.

Tarcisio Praciano-Pereira

Dep. de Matemática - Univ. Estadual Vale do Acaraú
versão 2000

Tarcisio Praciano Pereira
PhD in Mathematics

EXERCÍCIOS DE CÁLCULO

Edição eletrônica

Pereira, Tarcisio Praciano
P496c Exercícios de Cálculo

Sobral: UVA, 2001
249.p
Bibliografia
ISBN:85-87906-08-9

1 - Cálculo Diferencial e Integral - 2 - Derivadas
3 - Integral - 4 - Volumes.
I. Título
CDD 517.3

Sumário

Lista de Figuras

Introdução.

Este livro se compõe de duas "partes".

- A primeira é uma espécie de passeio turístico sobre os assuntos do Cálculo, *derivada* e *integral* junto com uma revisão da *Geometria Analítica* indispensável para desenvolver o Cálculo e neste passeio turístico visitamos os números.

  Como todo passeio turístico, este é superficial e reconhecemos nisto um defeito que ainda não sabemos como resolver apesar de nos termos dedicado durante mais de 15 a uma busca de como fazer isto reunindo a seriedade do tratamento com uma precupação pedagógica. O que nos consola é que começamos esta tentativa quando também na América alguns grupos iniciavam o que hoje se chama de *reforma do Cálculo* tendo alí se produzido um cisma significativo entre os que buscam a solução pedagógica e os que preferem continuar trilhando o caminho de sempre. Na bibliografia você pode encontrar as pegadas do nosso caminhar, ver [2], quando começamos.

- Na segunda parte desenvolvemos primeiro a integral e depois a derivada, nesta ordem, para finalmente juntarmos as duas num terceiro capítulo. Esta segunda parte tem mais dois capítulos de problemas genéricos: desigualdades e problemas geométricos, que são um vale-tudo usando derivada e integração.

Este é um livro de exercícios que esperamos que sirva a dois propósitos. Ao aluno que deseje aprofundar os seus conhecimentos ou estudar sozinho, ao professor que queira se inspirar em nossas tentativas para acrescentar apoio computacional às suas aulas.

O crítico ferino dirá que o livro é caótico, e tem razão. Mas é que reconhecemos pouco o método axiomático e a apresentação acabada e bem talhada como um método pedagógico. O aprendizado tem muito de caótico e não vemos porque deixariamos de usar a *integral* como um *método gerador de sucessões* quando estivermos falando de números e de sucessões. Ao mesmo tempo, a exposição do aluno aos conceitos de integral, como "área algébrica sob uma curva", ou "coeficiente angular instantâneo" desde os primeiros momentos, tem necessariamente que conduzir o aluno a desmistificar estes conceitos que ele pode dominar geométricamente desde o começo.

Eu não defenderia o caos como método, e fico aberto para aqueles que quiserem se juntar a mim nesta empreitada para produzir um trabalho mais arrumado.

Este livro tem nos exercícios seu objetivo. Ele é formado de listas de exercícios entremeadas de comentários teóricos. A solução destas listas está planejada para sair em um segundo volume.

Dentro dos capítulos há *seções* de modo a distribuir os exercícios por assunto. Há pequenos textos teóricos fazendo a introdução de cada capítulo e até mesmo das seções.

Os comentários, o texto teórico, são de nossa consideração um material importante do livro, mas nem sempre o mais fácil porque é resumido e supõe que o estudante já tenha estudado Cálculo e esteja apenas completando sua habilidade com exercícios de revisão e aprofundamento. Sugiro que o leitor inicialmente dê menos importância à teoria, e se concentre nos exercícios.

Talvez o leitor deva ler a "teoria" na ordem em que ela apareça, mas sem lhe dar muita importância, numa primeira leitura. Para lhe permitir uma busca mais acurada de informações, o livro tem um índice remissivo alfabético, ao final, em que *se pretende que todos os conceitos se encontram indexados* de forma a permitir um fácil retorno a eles quando achar necessário.

Os exercícios foram escritos para serem feitos com auxílio de uma *teoria mínima*. A própria teoria deve surgir dos exercícios. Isto não implica uma sugestão de despreso pela teoria, nela há dicas de como se aprofundar na solução dos exercícios. Em suma, quase todos os exercícios podem ser resolvidos em mais de um nível, e você deve resolvê-los no nível que puder, e depois tentar aprofundar a solução.

Uso uma convenção tipográfica no livro,

- *Texto em itálico,* representa material que você deve olhar com cuidado, possivelmente não está definido ainda e estou usando a concepção intuitiva do termo. Com frequência, ao usar termos em *itálico* eles podem aparecer posteriormente no texto definidos, neste caso procure no índice remissivo alfabético uma ocorrência do termo mais a frente no livro.
- Com `texto tipográfico,` estou fazendo referência a um termo técnico, já definido anteriormente ou considerado bem conhecido como tal.
- Ao usar letra pequena estou lhe querendo dizer que o assunto é "polêmico", que há muito mais coisa para ser dito do que estou conseguindo dizer naquele momento.
- Uso <u>texto sublinhado</u> para chamar sua atenção de um detalhe que poderia passar desapercebido, tem o mesmo sentido **texto em negrito**.

Chamo em particular sua atenção para os textos etiquetados com a palavra "observação", quase todos estão escritos com letra pequena e portanto se classificam, como acima, em "assunto incompleto", que deve ser discutido com mais cuidado. São uma forma de abrirmos uma discussão sobre um tópico que se encontra no momento certo de discutir mas cujo desenvolvimento quebraria a unidade do texto. Leia as observações para se inteirar do seu conteúdo sem quebrar o avanço do seu trabalho e volte a elas quando se sentir motivado. Dentro do texto existe uma ou mais palavras-chave, listadas no "índice remissivo", ao final para lhe permitir um retorno cômodo ao assunto.

Em particular faça uso do "índice remissivo" quando quiser procurar um assunto de interesse específico. Construimos este índice com cuidado para tentar listar o maior número possível de tópicos, contidos no livro, através de suas palavras-chave. Um uso importante do índice remissivo consiste na localização da definição dos termos contidos no livro.

Itens importantes neste livro são os *programas de computador*, você os pode conseguir com o autor do livro, via internet, tarcisioe-math.ams.org. Possivelmente junto com o livro, no mesmo diretório, você encontra o arquivo `programa.tgz` contendo todos os programas usados no livro.

Eu ficaria muito grato se informado de cópias feitas deste livro e do seu uso. Sugestões para próximas edições são bemvindas.

Sobral, 31 de janeiro de 2005

Tarcisio Praciano-Pereira

Parte I

Geometria analítica e números

Capítulo 1

Retas, círculos e parábolas.

1.1 Gráficos de curvas no plano

1.2 As funções

> As funções são uma generalização dos números: fazemos as quatro operações com funções, mas sobretudo, faremos duas novas operações com elas: *integração e diferenciação*. Estas duas operações são o objetivo do Cálculo. Não lhe iremos ensinar o que é função, se você estiver estudando Cálculo é porque já sabe o que elas são, o que faremos é lhe falar delas com outro enfoque preparando-o para as duas operações novas que ocuparão a segunda parte do livro.

Nós queremos entender as funções como *gráficos* que eventualmente têm uma equação "algébrica" mas não precisa necessariamente ser assim.

No gráfico (fig. 1.1) você tem uma função arbitrária, $y = f(x)$. Se trata de uma função

$$f : [-6, 6] \longrightarrow \mathbf{R}$$

que, portanto, associa a cada ponto do domínio, um número real. Tais funções servem para associar "quantidades" a pontos do intervalo. "Cálculo"é a disciplina que tem por objeto funções que devem ser analisadas basicamente por dois métodos:

- derivada;
- integral;

para, desta forma, tirar delas diversas informações.

Este é o assunto deste livro.

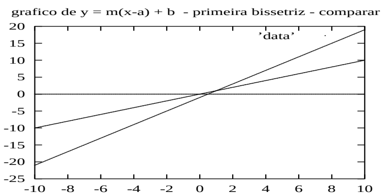

Figura 1.1: O gráfico de uma funcao no intervalo $[-6, 6]$.

1.2.1 Média aritmética ponderada

Neste exemplo temos uma função que não tem uma equação algébrica e veremos como podemos criar modelos que são aproximações de funções.

Exemplo: 1 *Resultados de um sensor...*

Suponha que o sistema de engenharia de tráfico *tenha colocado, em um ponto de uma rodovia, um sensor para contar o número de carros que por alí passasse a cada minuto. A contagem foi estratificada para alguns momentos do dia resultando na seguinte tabela de dados*

hora\quant.	*0*	*9*	*10*	*14*	*15*	*18*	*22*
	0	*0*	*10*	*90*	*10*	*90*	*0*

Mas para apresentar os dados ao público, o diretor do serviço fez uma interpolação linear dos dados expressa no gráfico (fig. , 1.2) página 3.

Esta função assume os valores

x	*0*	*9*	*10*	*14*	*15*	*18*	*22*
V(x)	*0*	*0*	*10*	*90*	*10*	*90*	*0*

Interpolação linear significa uma poligonal que une os pontos que representam os valores conhecidos ou os dados colhidos. Com a interpolação atribuimos valores aos pontos intermediários, onde o fenômeno não foi medido, média

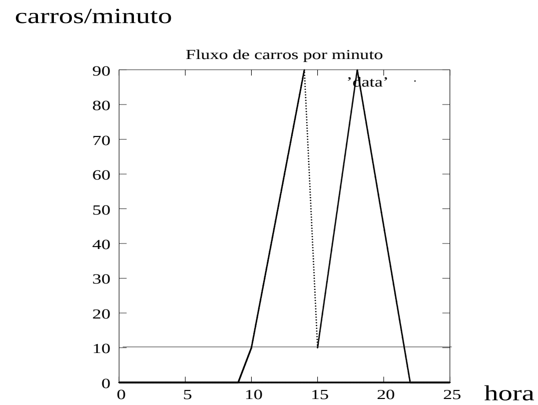

Figura 1.2: Número carros por minuto, num ponto duma rodovia.

aritmética*, quer dizer que*

$$V(15) = 10 \ ; \ V(18) = 90 \tag{1.1}$$
$$16 \in [15, 18] \Longrightarrow V(16) \in [10, 90] \tag{1.2}$$

$V(16)$ *é a média entre os valores*

$$V(15), V(18).$$

subordinada aos pesos $s = \frac{1}{3}, t = \frac{2}{3}$, *veja a figura (fig. 1.3).*

Na Geometria Analítica aprendemos a dividir um segmento numa razão dada, e aqui vemos o uso desta divisão. Queremos encontrar dois pesos

$$s, t$$

tal que o ponto

$$s(15, V(15)) + t(18, V(18))$$

se encontre sobre o segmento de reta determinado pelos pontos

$$(15, V(15)), (18, V(18))$$

A geometria plana nos conduz à solução, temos que obter triângulos semelhantes, veja a figura (fig. 1.3) página 4, e queremos que um dos triângulos seja determinado pelos pontos

$$15, 16, (16, V(16)) \in (15, V(15)), (18, V(18))$$

de modo que $(16, V(16))$ *fique sobre a reta que une os pontos*

$$(15, V(15)), (18, V(18))$$

porque desejamos fazer uma interpolação linear dos dados.

Figura 1.3: A divisão de um segmento numa razão dada

O sistema de equações que temos de resolver aparece na (fig. 1.3). Os mesmos "pesos" que vão dividir a hipotenusa, também dividem o cateto horizontal do triângulo maior na figura. Para fazer a conta com o triângulo, tiramos primeiro a altura 10 transformando o trapésio num triângulo, e fazemos as contas com o triângulo "no chão". Depois acrescentamos a "base" 10 para retornar ao trapésio e calcular $V(16)$:

$$\frac{1}{3}80 + \frac{2}{3}0 = \frac{80}{3} \tag{1.3}$$
$$V(16) = 10 + \frac{80}{3} \tag{1.4}$$
$$V(16) = 10 + \frac{78}{3} + \frac{2}{3} \tag{1.5}$$
$$V(16) = 10 + 26 + \frac{2}{3} = 36 + \frac{2}{3} \tag{1.6}$$

Colocamos o triângulo no chão desnecessáriamente. A proprocão também vale para o trapésio:

$$\frac{1}{3}90 + \frac{2}{3}10 = \frac{90}{3} + \frac{20}{3} = \tag{1.7}$$
$$= \frac{110}{3} = \frac{108}{3} + \frac{2}{3} = \tag{1.8}$$
$$= 36 + \frac{2}{3} \tag{1.9}$$

porque a base comum do trapésio não destrói a proporção.

Observação: 1 *Média e estimativa*

No exemplo acima falamos de "interpolação linear"de dados. A interpolação linear *é um método simplificado para estimar dados entre dois valores que foram* realmente *coletados. É uma estimativa* razoável *porque é uma média e nós admitimos que as médias são uma boa representação da realidade a partir dos dados que conhecemos.*

Há outras formas mais sofisticadas, e precisas, de interpolação, mas a média aritmética ponderada é um bom começo.

Com a interpolação linear temos $V(16) = 36 + \frac{2}{3}$ *carros por minuto. Isto pode parecer irreal, não poderiam passar* 36 carros e "dois terços de carro"em um minuto. *Mas poderiam ter passado,* em média, *36 carros e dois terços em um minuto no instante* $t = 16$.

Veja que se trata de um "valor médio", uma estimativa*:*

- *No "instante", 15, passaram 10 carros/m;*
- *no instante* $t = 18$ *passaram 90 carros/m;*
- *no instante intermediário,* $t = 16$, *podemos calcular o fluxo de carros com uma média aritmética ponderada, :*

$$\text{pesos:}\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \tag{1.10}$$
$$V(16) = \frac{2}{3}V(15) + \frac{1}{3}V(18) \tag{1.11}$$
$$\frac{2}{3}10 + \frac{1}{3}90 = \frac{110}{3} \tag{1.12}$$
$$V(16) = \frac{110}{3} = 36 + \frac{2}{3} \tag{1.13}$$

  como a quantidade de carros por minuto. Os pesos foram determinado pela posição de 16, relativamente a 15 e 18.

- *no instante* $t = 17$ *podemos calcular o fluxo de carros com uma média aritmética ponderada:*

$$\text{pesos:}\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \tag{1.14}$$
$$V(17) = \frac{1}{3}V(15) + \frac{2}{3}V(18) \tag{1.15}$$
$$\frac{10}{3} + \frac{180}{3} = \frac{190}{3} \tag{1.16}$$
$$V(17) = \frac{190}{3} = 63 + \frac{1}{3} \tag{1.17}$$

  como a quantidade de carros por minuto. Novamente, os pesos foram determinado pela posição de 17, relativamente a 15 e 18.

Observação: 2 *Pesos, modelagem e os fatos. Contradição?*

Você pode conferir os valores calculados para os pesos a partir do gráfico, (fig. 1.3).

A escolha dos pesos não foi arbitrária, ela foi consequência de uma lei da geometria, a semelhança de triângulos.

Mas podemos ir um pouco mais a fundo nesta questão e tirar outras conclusões.

No caso de $V(16)$, *como* 16 *está mais próximo de 15 que de 18, o peso* $\frac{2}{3}$ *foi atribuido a* $V(15)$ *enquanto que o peso* $\frac{1}{3}$ *foi atribuido a* $V(18)$.

Quer dizer que geometria *nos ensina que o valor* $V(15)$ *é muito mais importante para o cálculo de* $V(16)$ *que o valor* $V(18)$ *que se encontra mais longe. É porisso que a Terra gravita em torno do Sol que é uma estrela de 7ª grandeza, por* estar mais perto, *a força de gravidade do Sol termina sendo mais importante que a a força de gravidade de uma estrela de 1ª grandeza.*

No caso de $V(17)$, *pelas mesmas razões, os pesos foram distribuidos ao contrário, uma vez que* 17 *está mais próximo de* 18.

Experimente inverter os pesos no cálculo de $V(16)$ *e de* $V(17)$, *faça uma interpolação linear com os valores resultantes, para que você se convença de que a solução que* nós esco*lhemos é a mais lógica.*

1.2.2 Lendo a informação obtida

Podemos agora calcular a quantidade de carros que passaram, neste intervalo de tempo, no ponto em que se encontra o sensor. Esta quantidade vai ser expressa pela *área do trapésio que o gráfico apresenta*. Novamente a geometria nos ensinando a criar uma modelagem para a natureza.

No intervalo $[15, 18]$ passaram (cálculo da área do trapésio):

$$\text{tempo } 3h = 180m \text{ é a base do trapésio} \tag{1.18}$$
$$\frac{V(15)+V(18)}{2} \text{ é a altura média do trapésio} \tag{1.19}$$
$$\frac{V(15)+V(18)}{2} = \frac{10+90}{2} = 50 \text{ carros por minuto} \tag{1.20}$$
$$\text{área algébrica} = 50 \text{ carros/minuto x } 180 \text{ minutos} = \tag{1.21}$$
$$\text{área algébrica} = 50 \text{ carros/minuto x } 180 \text{ minutos} = \tag{1.22}$$
$$\text{área algébrica} = 50 \text{ x } 180 \text{ carros} = 9000 \text{ carros} \tag{1.23}$$

Como foi uma duração de três horas o tempo medido, temos que multiplicar esta média por 180 minutos, para calcular quantos carros teriam passado por este ponto. Desta forma, o gráfico reflete o que acontece nos pontos intermediários de um intervalo analisado.

. O adjetivo *linear*, em *interpolação linear* é usado porque usamos um "segmento de reta"para definir o que se passa entre os pontos extremos, se fosse uma *curva logarítmica*, se chamaria "*interpolação logarítmica*", *quadratica*, se usassemos uma curva do segundo grau, etc...

Exercícios: 1 *Funções e gráficos*

1. *Calcule o "volume" de tráfego que passou pelo sensor entre 16 e 17 horas a partir dos dados coletados no exemplo acima.*
2. *Uma função f assume os seguintes valores*

$$\{(0, 3), (3, 5), (6, 10), (10, 0)\}$$

Considerando a função definida no intervalo $[0, 10]$, e interpolando linearmente os valores dados acima, faça o gráfico da função no intervalo $[0, 10]$.

3. *Calcule aproximadamente os valores da função f, definida na questão anterior nos pontos: $x \in \{1, 2, 7, 9\}$.*
4. *Considere $f(x) = x+3$. Calcule os valores $f(0), f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)$. Faça o gráfico de f no intervalo $[0, 10]$.*
5. *Faça o gráfico de $f(x) = x + 3$ quando $x \in [-5, 5]$.*
6. *Faça o gráfico de $f(x) = x$ quando $x \in [-5, 5]$. Qual seria o valor médio de f neste intervalo ?*
7. *Como consequências de algumas medidas um pesquisador encontrou numa certa amostra de bacilos os seguintes dados*

mm^3	*quantidade*	mm^3	*quantidade*
5	*10*	*15*	*25*
10	*18*	*20*	*30*

Considerando estes valores de uma função f que fornece a quantidade de bacilos por milímetro cúbico, interpole os valores linearmente e faça o gráfico da função no intervalo $[0, 20]$.

1.2.3 Área sob uma curva - a integral.

O exemplo "*censor da quantidade carros que passam por minuto*" nos mostra que a área da região limitada pelo gráfico de uma função e o eixo OX tem um significado importante. Este número registra a *quantidade do fenômeno*. Um símbolo representa esta área:

$$\int_{15}^{18} V(t) = 9000 \text{ carros}$$

que se lê: *integral de V desde 15 até 18.*

A *integral* é um dos métodos do cálculo que estudaremos neste livro.

Definição: 1 *Primeira definição da integral*

Dada uma função definida no intervalo $[a, b]$, consideramos a região limitada pelo grafico de f, o eixo OX, e as retas $x = a$, $x = b$. Se esta região tiver uma área, designamos esta área, que é um número com o símbolo

$$\int_a^b f$$

é uma área algébrica no sentido que pode ser positiva, negativa ou mesmo nula.

Ao longo deste livro você irá aprender a calcular integrais de funções cujo gráfico não é feito de segmentos de reta, mas neste primeiro capítulo calcularemos integrais apenas neste caso mais simples usando as regras para calcular área de trapésios.

Aqui podemos ver que a *integral* representa a quantidade de um certo fenômeno, aqui a quantidade de carros que trafegou pela rodovia entre dois momentos escolhidos.

Um outro exemplo deve ajudá-lo a compreendeer o que significa *a quantidade do fenômeno* estudado.

Figura 1.4: Velocidade contra o tempo, gráfico da velocidade

Exemplo: 2 *Distância percorrida*

Considere o gráfico na figura (fig. 1.4) página 8, (fig. , 1.4) página 8, que agora vamos interpretar como

$$V(t) = velocidade\ no\ ponto t de\ um\ movel\ em\ Km/h$$

Agora a área significa:

$$A = \frac{h+H}{2}b = \frac{10km/h + 90Km/h}{2}3h = 150Km$$

A representa a distância percorrida, novamente *a quantidade total do fenômeno. É esta a interpretacao usual de uma integral, quando a variável é o tempo:* **quantidade do fenômeno** *entre dois momentos dados.*

Analisando o gráfico que descreve o movimento de um veículo durante três horas, vemos que houve um imprevisto no caminho quando a velocidade teve que cair para 10 km/h. Engarrafamento? problemas na estrada?

A análise, mesmo visual de um gráfico transmite informações que devem ser analisadas em profundidade para delas se tirar conclusões. Os métodos do Cálculo permitem esta análise em profundidade.

Observação: 3 *Integral da função taxa-variação*

Os dois exemplos de função cujas integrais calculamos, eram funções que mediam taxa de variação

Esta relação entre taxa de variação *e* integral *produz uma nova função que mede a* quantidade total *do fenômeno.*

Figura 1.5: Área nula, área álgebrica

Vamos ver um outro exemplo em que um novo fato se vai apresentar. Veja a (fig. , 1.5) página 9. O gráfico da função se compõe de dois triangulos. Num deles a área é negativa, no outro a área é positiva.

Exemplo: 3

Vamos verificar estes dois fatos: "área positiva" e "área negativa".

As integrais que calculamos até agora representam as áreas sob os gráficos de funções nos casos em que estes gráficos são segmentos de retas. Áreas de trângulos ou trapésios. Na figura (fig. , 1.5), o gráfico se compõe de dois triângulos.

- *Um triângulo em que a base* vai de -3 *até* 0, *e a altura é* -1.5 *e: Área:*
$$\frac{(base)\cdot(altura)}{2} = \frac{3\cdot(-1.5)}{2} = -2.25$$
- *outro cuja base* vai de 0 *até* 6 *e a altura é 3. Área:*
$$\frac{(base)\cdot(altura)}{2} = \frac{(6)\cdot 3}{2} = 9$$

Quer dizer que a quantidade do fenômeno entre -3 *e* 0 *é negatiga, e a quantidade do fenômeno entre* 0 *e* 6 *é positiva. Portanto a "quantidade total"do fenômeno é*

$$9 - 2.25 = 6.75$$

Neste caso, "quantidade total"significa "área algébrica".

Exercícios: 2 *Área algébrica*

1. *Leia no gráfico (fig. 1.4) a velocidade do móvel no instante* $t = 13$.

2. *Verifique que há um ponto* t_0 *tal que* $\int\limits_{-3}^{t_0} V(t) = 0$ *em que* $V(t) = 0.5 * t$ *é a função cujo gráfico se encontra na figura (fig. , 1.5). Calcule* t_0.

3. *Represente graficamente:*
   - $\int\limits_{-3}^{5} 3x + 4$
   - $\int\limits_{0}^{4} x$
   - $\int\limits_{-4}^{0} x$
   - $\int\limits_{0}^{\frac{8}{3}} 4 - 3x$

4. *Calcule as integrais do item anterior.*

5. pêndulo *Vamos descrever de forma intuitiva o movimento de um pêndulo. O exercício consiste de acompanhar o texto abaixo e conferir sua interpretação com a análise do gráfico,(fig. 1.6) página 11. Ao final algumas perguntas vão verificar sua compreensão do texto e do gráfico.*

   - *O gráfico, (fig. 1.6), representa a curva de velocidade do péndulo,* de velocidade contra o tempo, como é dito nos livros de Física.
   - *O pêndulo é solto e inicia um movimento em queda livre no* instante $t_0, V(t_0) = 0$. *Neste* instante *ele tem energia potêncial máxima (alguém o carregou até a altura em que ele se encontra). Sua velocidade cresce, sob ação da gravidade, (perdendo energia potencial e ganhando energia cinética, velocidade) até o instante* $t_1, V(t_1) = M$;
   - *O pêndulo atinge a altura máxima novamente no* instante $t_2, V(t_2) = 0$, *com energia potencial máxima e energia cinética nula.*
   - *No* instante t_3 *o pêndulo atingiu, novamente, o ponto mais baixo de sua trajetória. Tem energia cinética máxima* $V(t_3) = M$ *e energia potencial mínima e começa a subir novamente, perdendo energia cinética e ganhando energia potencial.*
   - *No* instante t_4 *ele atinge novamente a altura máxima com máximo de energia potencial e energia cinética zero* $V(t_4) = 0$. *Vamos supor que tenha acontecido assim, sob condições especiais, atrito quase nulo no ponto de apoio e o pêndulo dentro de uma redoma com ar muito rarefeito, a altura final é quase mesma que a altura inicial, quando o pêndulo foi solto.*

Figura 1.6:

   - *No instante* t_4, *entretanto, ele voltou ao ponto inicial (ou quase ao ponto inicial) logo o movimento total do pêndulo foi nulo. Consequentemente as áreas*

     (a) entre t_0 *e* t_2, $\int\limits_{t_0}^{t_2} V(t)$

     (b) entre t_3 *e* t_4, $\int\limits_{t_3}^{t_4} V(t)$

     têm sinais contrários de modo que a soma delas seja nula.

   Quais das seguintes afirmações são verdadeiras:

a) $\int\limits_{t_0}^{t_2} V(t) = \int\limits_{t_2}^{t_4} V(t)$	*b)* $\int\limits_{t_0}^{t_2} V(t) = -\int\limits_{t_2}^{t_4} V(t)$
c) $\int\limits_{t_0}^{t_4} V(t) = 0$	*d)* $V(t_1) = 0$
e) $V(t_1) = 0$	*f)* $V(t_2) = 0$
g)$V(t_0) = 0$	*h)* $V(t_4) = 0$
i) $V(t_3) > 0$	*j)* $V(t_3) < 0$

Algumas das áreas calculadas nos exercícios acima são negativas, outras nulas. Por isto dizemos que a integral é uma área algébrica. Você ainda verá que as integrais podem representar volumes e outros tipos de medida.

Figura 1.7: A integral corresponde à área dos dois triângulos.

Vamos deduzir do próximo exemplo uma propriedade das integrais. Esta propriedade terá que ser demonstrada em algum momento posterior.

Exemplo: 4 *Uma propriedade das integrais.*

Qual seria o valor de $\int_{6}^{-3} V(t)$ *em que* V *é a função cujo gráfico se encontra representado na (fig. , 1.5) ?*

Veja que agora estamos dizendo que a base vai de 6 *até* -3. *quer dizer que invertemos a direção de percurso em que vamos calcular a base. Temos os mesmos dois triângulos do exemplo anterior. A diferença:* a base agora é considerada em sentido reverso.

Veja o gráfico 1.7 na página 12.

- *Um triângulo em que a base* vai de 0 *até* -3, *e a altura é*-1.5 *e: Área:*

$$base = -3 - 0 = -3 \ ; \ \frac{(base) \ \text{x} \ (altura)}{2} = \frac{-3 \ \text{x} \ (-1.5)}{2} = 2.25 \tag{1.24}$$

$$\int_{0}^{-3} V(t) = \frac{4.5}{2} = 2.25 \tag{1.25}$$

- *outro cuja base* vai de 6 *até* 0 *e a altura é 3. Área:*

$$base = 0 - 6 = -6 \ ; \ \frac{(base) \ \text{x} \ (altura)}{2} = \frac{(-6) \ \text{x} \ 3}{2} = -9 \tag{1.26}$$

$$\int_{6}^{0} V(t) = -9 \tag{1.27}$$

- *A área total será então*

$$-9 + 2.25 = -6.75$$

Vemos assim que

- $\int_{-3}^{6} V = 6.75$
- $\int_{6}^{-3} V = -6.75$

Vimos neste exemplo a seguinte propriedade que devemos demonstrar posteriormente, (um exemplo pode não provar nada).

$$\int_{a}^{b} f = -\int_{b}^{a} f \ .$$

Invertendo os limites de integração troca-se o sinal da integral.

Uma outra propriedade se destaca deste exemplo:

- Temos $[-3, 6] : \xrightarrow{f} \mathbf{R}$ e $t_0 \in [-3, 6]$.
- Podemos calcular $\int_{-3}^{t_0} V(t)$
- Podemos calcular $\int_{t_0}^{6} V(t)$
- Podemos calcular $\int_{-3}^{6} V(t)$
- e $\int_{-3}^{6} V(t) = \int_{-3}^{t_0} V(t) + \int_{t_0}^{6} V(t)$

Quer dizer que quebramos o cálculo da integral em duas usando um ponto intermediário t_0. Esta propriedade fica assim, em termos mais gerais:

- Temos $V : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ com $c \in [a, b]$.
- Podemos calcular $\int_{a}^{c} V(t)$
- Podemos calcular $\int_{c}^{b} V(t)$

- e
$$\int_a^b V(t) = \int_a^c V(t) + \int_c^b V(t)$$
- ou
$$\int_a^c V(t) = \int_a^b V(t) + \int_b^c V(t)$$

O mais interessante é que o ponto c da propriedade acima não precisa ficar dentro do intervalo. Veremos o porque disto quando formalizarmos a definição de integral.

Estudamos a área delimitada pelo gráfico de uma função e o eixo OX. Calculamos a integral de funções "lineares". Se soubessemos a "equação"daquelas funções, parte do trabalho poderia ter sido mais fácil. Vamos ver como seria isto. Em lista futura faremos este trabalho de forma diferente.

Na próxima seção vamos estudar geometricamente outro conceito e sua interpretação formal, o coeficiente angular instantâneo.

1.3 Retas, coeficiente angular e derivada

Vamos estudar um tipo particular de função cujo gráfico é uma reta, um tipo particular de curva que tem coeficiente angular constante. As funções deste tipo têm uma *derivada* simples e vamos usá-las para apresentar este conceito, de forma intuitiva, como fizemos com a *integral*.

1.3.1 O coeficiente angular - derivada

O *coeficiente angular instantâneo*, a derivada, é outro método de análise que o Cálculo Diferencial e Integral oferece para possamos tirar informações finas de um gráfico ou de uma função. Da mesma forma que a *integral*, mais a frente voltaremos a discutir a derivada colocando-a num contexto mais formalizado. Neste momento é a sua visão intuitiva que estamos apresentando.

O Cálculo Diferencial e Integral se dedica a análise de gráficos que representem *funções* e estas guardam informações que foram colhidas da realidade que nos envolve. Na construção das técnicas do Cálculo precisamos usar funções definidas algébricamente porque com elas podemos mais facilmente discutir as propriedades da *integral* e da *derivada* que posteriormente você irá aplicar em funções obtidas a partir de dados como é o caso dos gráficos (fig. 1.2) ou (fig. 1.4).

Esta é a razão da *Geometria Analítica*, familiariá-lo com curvas definidas algebricamente para que depois você possa entender, ou construir outros tipos de curva para modelar os fenômenos com que estiver trabalhando.

Agora vamos discutir as retas e suas equações, e no Universo inteiro não existe uma única reta, mas a discussão delas nos conduz em nossos primeiros passos a compreender as curvas que constituem o Universo.

Retas são *curvas* que tem *coeficiente angular* constante, e claro, porisso mesmo elas não existem, porque os coeficientes angulares mudam a todo instante.

Vamos mostrar que a

- equação de uma reta pode ser da forma $y = Ax + B$, em que A é o *coeficiente angular*, e que
- o gráfico de $y = Ax + B$ é uma reta.

É preciso salientar que *coeficiente angular* é um conceito relativo. Sempre precisamos de *referências*, e quando *fixamos* algum referêncial (neste Universo em reboliço ...) podemos então calcular *distências, coeficientes angulares, velocidades, etc...* Aos poucos você verá que esta *mobilidade* toda apenas perturba no início.

Observação: 4 *Função escada de função não linear*

As funções-escada são aproximações de uma outra função por pequenos saltos constantes. Aceite esta visão intuitiva como uma definição. Você verá, depois, uma definição mais precisa.

Vamos comparar os dois gráficos (fig. 1.8) e (fig. 1.9) em busca da informação que possamos tirar associada ao coeficiente angular. São duas curvas, uma tem o coeficiente angular constante, a reta, e na outra o coeficiente angular varia a todo instante, não sendo uma reta.

Nos gráficos (fig. 1.8), na página 16 e (fig. 1.9), na página 17, você tem dois exemplos de "função-escada".

Veja o que acontece quando consideramos a "funcao escada"associada a uma função não linear na (fig. 1.9), na página 17. Os "patamares" da escada, num caso, variam de tamanho (função não linear) e no outro caso os "patamares" têm sempre os mesmo tamanhos.

A diferença entre as duas funções-escada, (fig. 1.9), na página 17, e (fig. 1.8), na página 16 se explica pelo `coeficiente angular` *variável de uma função que não seja linear.*

Vamos nos fixar agora na função "linear afim".

Suponha que no gráfico, (fig. 1.8), a equação seja $y = g(x) = Ax + B$

A cada deslocamento Δx corresponde o mesmo acréscimo Δy. Vamos calcular o valor do acréscimo.

Observe a figura (fig. 1.10) página 18, em que um retângulo desliza com uma das diagonais sobre uma reta. Em qualquer ponto em que o retângulo se encontre, a razão entre os lados Δx e Δy é a mesma. Os nomes que estamos,Δx e Δy, usando fazem parte do jargão da Matemática e significam "diferença" (na

Figura 1.8: Função escada e a Função "Linear".

Matemática) ou "deslocamento" (na Física). No eixo OX significa "diferença" enquanto que no eixo OY, Δy signfica "acréscimo".

Definição: 2 *Diferença e acréscimo*
Dada uma função $y = g(x)$ denominamos uma variação no domínio de Δx e designamos

$$\Delta y = \Delta g = g(a + \Delta x) - g(a)$$

de acréscimo de g no ponto $\underline{x = a}$.

Se calcularmos a diferença

$$\Delta y = g(x + \Delta x) - g(x) = A(x + \Delta x) + B - (Ax + B) = \tag{1.28}$$

$$= Ax + A\Delta x + B - Ax - B = A\Delta x \tag{1.29}$$

Δy tem o valor constante igual a $A\Delta x$.

Se esta relação for constante o gráfico de g é uma reta. Se esta relação não for constante, o gráfico de g não pode ser uma reta. Para as retas não importa onde o "acrescimo" esteja sendo calculado, ele é obtido por relação constante com o "diferença Δx. Para as *curvas não retas* o valor do "acrescimo" pode mudar de ponto para ponto.

Figura 1.9: Funcao escada associada a uma função não linear.

Exercícios: 3

1. *Considere $g(x) = Ax + B$. Verifique que se $\Delta x = 3\Delta y$, então $A = \frac{1}{3}$.*
2. *Considere $g(x) = Ax + B$. Verifique que $\Delta y = A\Delta x$ para qualquer deslocamento Δx.*
3. *<u>Uma reta qualquer não paralela a OY</u>*
   (a) *Verifique, por semelhança de triângulos, que para qualquer reta que não seja paralela ao eixo OY a relação entre Δy e Δx é da forma $\Delta y = A\Delta x$, em que A é uma constante típica da reta.*
   (b) *Identifique esta constante usando um triângulo retângulo que tenha a hipotenusa sobre a reta e os catetos paralelos aos eixos. Observe que A é a tangente de um dos ângulos deste triângulo.*
4. *Escreva o texto do teorema que nós demonstramos no exercício anterior.*
5. *Deduza que a equação de uma reta que não seja paralela ao eixo OY é da forma $y = Ax + B$.*
6. *Considere no plano uma reta que designaremos por* horizontal *e a chamaremos de "eixo OX". Considere uma reta perpendicular à reta horizontal, chame-a de "eixo OY". Oriente estas retas nela marcando os números reais considerando o ponto de interseção entre elas como sendo o zero comum a ambas. Marque no plano os pares de pontos abaixo e determine a equação das retas que eles determinam:*

Figura 1.10: A razão fixa entre Δx e Δy

a) $(-3, 2), (4, -3)$ *b)* $(-3, -2), (4, -3)$
c) $(3, 2), (4, -3)$ *d)*$(3, -2), (4, -3)$.

O teorema demonstrado num exercício acima é:

Teorema: 1 *Um invariante típico das retas*
Em uma reta qualquer, que não seja parelala ao eixo OY, dados tres pontos quaisquer $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ se tem:

$$\frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y'}{\Delta x'}$$

esta proporção, é o invariante *típico da reta chamado* `coeficiente angular` .

A recíproca do teorema demonstrado diz que toda reta tem por equação uma do tipo $y - y_0 = A(x - x_0)$ exceto num caso, quando a reta for paralela ao eixo OY, guarde esta exceção em sua memória para discutirmos depois.

Teorema: 2 *Equação da reta*
Numa reta qualquer, que não seja paralela ao eixo OY, um ponto arbitrário (x, y) satisfaz a equação:

$$y - y_0 = A(x - x_0) \equiv$$
$$y - y_0 = Ax - Ax_0 \equiv$$
$$y = Ax - Ax_0 + y_0 \equiv y = Ax + B \ ; B = y_0 - Ax_0$$

Dem *: Se tivermos dois pontos $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ determinando uma reta, basta partirmos da proporção que é a tese no teorema anterior:*

$$\frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y'}{\Delta x'}$$

nela substituindo (x_2, y_2) por (x, y) para obtermos:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = A = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

donde deduzimos

$$y - y_0 = A(x - x_0) \equiv y = Ax - Ax_0 + y_0 = g(x) = Ax + B$$

q.e.d .

Se $y = g(x)$ "for uma reta"o coeficiente angular é constante, quer dizer que

$$\frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = A.$$

Esta expressão vale para qualquer x e para qualquer k.
Aqui vamos completar a nossa introdução sobre as retas e suas equações. Discutimos a equação da reta chegando à conclusão de que

- Se uma função tiver por equação $y = g(x) = Ax + B$ então o seu gráfico é uma reta com coeficiente angular A, e, reciprocamente,
- se uma função, $[a, b] : \xrightarrow{f} \mathbf{R}$ tiver por gráfico uma reta, então a equação desta reta é da forma $y = g(x) = Ax + B$.

O coeficiente angular é uma entidade geométrica, como a área. O que difere uma reta, de uma curva qualquer, como o gráfico da função na (fig. 1.1), na página 2, é o coeficiente angular.

Definição: 3 *Reta Uma reta é* uma curva *que tem coeficiente angular constante.*

Mas, podemos falar do coeficiente angular de uma curva como na (fig.1.1), na página 2 ? Veja a resposta sugerida nos gráficos (fig. 1.12), página 21 e (fig. 1.13) na página 22.

Equação da reta

O par de teorema anunciados acima estabelecem que uma reta tem por equação uma expressão do primeiro grau. Isto não é toda a verdade, uma vez que uma exceção ficou estabelecida.
Vamos rapidamente estabelecer toda a verdade.
Se uma reta não for paralela ao eixo OY os dois teoremas dizem tudo, e vamos apenas chamar sua atenção para o formato das equações obtidas:

- $y - y_0 = A(x - x_0)$ é uma forma da equação que salienta que a reta passa no ponto (x_0, y_0) e tem `coeficiente angular` A.

- A equação anterior pode ser transformada para assumir o aspecto $y = Ax + B$ em que $B = y_0 - Ax_0$. Neste formato se põe em evidência o `coeficiente angular` A e o `coeficiente linear` B que é o ponto em que a reta corta OY.

  Veja na figura (fig. 1.11) página 20, o significado destas duas equações.

Figura 1.11: Duas formas da equação reta. A reta não é paralela ao OY

Se a reta for paralela ao eixo OY então ela corta o eixo OX em um ponto $x = a$. Esta será a equação da reta neste caso. Mais a frente, neste capítulo, voltaremos a discutir as reta junto com outras curvas importantes para o Cálculo.

A figura (fig. 1.12), página 21, mostra o gráfico simultâneo de uma função f e de retas tangentes ao gráfico de f nos pontos $(-6.5, f(-6.5))$ e $(-4.7, f(-4.7))$.

Como já sabemos calcular o coeficiente angular de uma reta, podemos agora calcular o coeficiente angular *instantâneo* de uma curva num ponto escolhido da mesma. Como fazer isto?

O significado de reta tangente representa a saída para esta questão. Um exemplo bem conhecido nos vai deixar isto mais claro:

Exemplo: 5 *A pedra e o cordão que se quebra.*

Considere um cordão "podre" com o qual você amarra uma pedra não muito pesada. Agora rode a pedra presa ao cordão e vá aumentando sucessivamente a velocidade angular. Como o cordão está podre, ao ser atingida uma certa

Figura 1.12: Uma função com tangentes em $(-6.5, f(-6.5))$ e em $(-4.7, f(-4.7))$.

velocidade, a força centrífuga (que horror! que os físicos não nos leiam...), o cordão vai se romper e ... a pedra parte pela tangente. Ver figura 1.13 na página 22.

Que lição podemos tirar desta experiência? Várias, uma delas que é perigoso usar cordões podres... Mas o que nos interessa aqui é o fato físico. Podemos dizer que a pedra "memorizou" o coeficiente angular instantâneo que o seu movimento tinha, ao se quebrar o cordão, e seguiu seu caminho ao longo de uma reta com este coeficiente angular. Mas, devido à força da gravidade, ela optou seguir por uma parábola e não por uma reta.

Do exemplo se conclue que podemos calcular o coeficiente angular instantâneo de uma curva usando a reta tangente no ponto desejado.

Vejamos um outro exemplo usando o gráfico (fig. 1.12), página 21.

Exemplo: 6 *Faixa de irradiação*

Suponha que a curva "$graf(f)$" na figura (fig. 1.12), represente o caminho percorrido por um canhão de partículas *de alta intensidade energética e que o* `obturador` *do canhão se abre quando $t = -6.5$ e se fecha quando $t = -4.7$. Qual é área potencialmente irradiada pelo feixe de partículas emitido pelo canhão durante o tempo em que o obturador estiver aberto?*

A resposta a esta pergunta corresponde a uma região delimitada pelas duas semi-retas tangentes nos pontos $(-6.5, f(-6)), (-4.7, f(-4, 7))$.

Experimente "hachuriar" esta região no desenho.

Figura 1.13: Um pedra em rotação que sai pela tangente.

Podemos tornar o problema ainda mais interessante se acrescentarmos mais hipóteses. Por exemplo, incluindo o raio de periculosidade de ação do feixe *de partículas. Isto corresponderia a traçar círculos, centrados nos pontos de tangência determinando as regiões atingidas pela emissão com a intensidade de um percentual determinado.*

Este exemplo mostra, de um lado, a limitação da análise que um matemático pode fazer sozinho, sem o apoio de um especialista em irradições. Por outro lado mostra também a importância do trabalho interdisciplinar na solução de problemas.

O coeficiente angular instantâneo é `derivada` da curva no ponto em que ele for calculado (ou medido). Quer dizer que o coeficiente angular da reta tangente é a derivada da função tangenciada no ponto de tangência.

Neste momento somente sabemos calcular as derivadas das retas que é exatamente o coeficiente angular invariante que elas têm. A derivada é o outro *método* do Cálculo que estudaremos aqui neste livro.

Exercícios: 4 *Gráficos e integrais.*

1. *Na descrição que fizemos acima da região irradiada por um canhão de partículas, veja a (fig. 1.12), tem um erro (na figura e na descrição). A região irradiada não esta* `exatamente` *delimitada pelas semi-retas tangentes. Corrija o erro na descrição indique qual é* `exatamente` *a região irradiada.*

2. *Trace os gráficos das equações:*

$f_1(x) = 3x + 1$	$f_2 f(x) = 2x + 1$	$f_3(x) = x + 1$
$f_4(x) = -3x + 1$	$f_5(x) = -2x + 1$	$f_6 f(x) = -x + 1$

3. *Desenhe a reta com coeficiente angular* m

$$m \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}.$$

4. *Calcule* $\int\limits_{-3}^{4} f_1(s)$ *com* $f_1(s) = 3s + 1$

5. *Calcule* $\int\limits_{-3}^{0} f_1(s)$ *com* $f_1(s) = 3s + 1$

6. *Calcule* $\int\limits_{0}^{4} f_1(s)$ *com* $f_1(s) = 3s + 1$

7. *Verifique a propriedade*

$$\int\limits_a^c f(t) = \int\limits_b^c f(t) + \int\limits_a^b f(t)$$

8. *Verifique a propriedade* $\int\limits_a^b f(t) = -\int\limits_b^a f(t)$ *com as funções definidas acima.*

9. *Trace o gráfico da parábola* $y = f(x) = (x-3)^2 - 4$.
   (a) *Trace as retas tangentes ao gráfico de* f *nos pontos* $(2, -3)$ *e no ponto* $(4, -3)$.
   (b) *Estas retas se encontram num terceiro ponto, determine este ponto, (use as informações* heurísticas *que você tiver).*
   (c) *Que diferenças você pode encontrar entre as duas retas?*
   (d) *Calcule os coeficientes angulares das duas retas e confronte com suas conclusões anteriores.*

O nosso objetivo aqui é apresentar as cônicas de uma forma semelhante voltada para os objetivos do Cálculo. Assim, a "equação"da reta, que é uma expressão da forma

$$Ax + By + C = 0$$

nós vamos escrevê-a sempre no formato

$$B \neq 0 \Longrightarrow y - b = m(x - a) \quad (1.30)$$

$$B = 0 \Longrightarrow x - a = 0 \quad (1.31)$$

A primeira forma, $y - b = m(x - a)$ salienta dois aspectos essenciais para nós

- o ponto (a, b) por onde a reta passa e
- o coeficiente angular, m.

Logo vamos ver que o coeficiente angular, m, é a *derivada* da função definida por esta equação.

Você vai ver que todas as cônicas podem ser escritas com um formato que lembra este, caracterizando sempre um ponto importante para o gráfico da curva em consideração além de algum outro aspecto também significativo.

É importante rapidamente saber identificar a reta que corresponde a uma equação

$$y - b = m(x - a)$$

assim como saber re-escrever uma equação dada no formato

$$Ax + By + C = 0$$

para salientar o ponto em que a reta passa e o seu coeficiente angular. Os próximos exercícios devem levá-lo à prática destas transformações.

Exercícios: 5 *Reta e coeficiente angular*

1. *coeficiente angular Escreva as equações seguintes evidenciando um ponto por onde a reta passa e seu coeficiente angular.*

$$\begin{array}{ll} \textit{1)}\ 3x + 2y - 9 = 0 & \textit{2)}\ -3x + 2y + 9 = 0 \\ \textit{3)}\ 3x - 2y - 9 = 0 & \textit{4)}\ 3x = 2y - 9 \end{array}$$

2. *Faça o gráfico de cada uma das retas do item anterior*

3. *Para cada uma das equações do item 1, obtenha a equação no formato*

$$y - b = m(x - 4)$$

e justifique porque qualquer reta daquele tipo passa no ponto (a, b). Seria possível resolver a questão também impondo um valor para $\underline{b}$?

4. *Justifique:* se $B = 0$ em

$$Ax + By + C = 0$$

então não podemos obter uma equação da forma

$$y - b = m(x - a)$$

Figura 1.14: $y = m(x - a) + b$; $m = 2$; $P = (2, 3)$. Com o gráfico da primeira bissetriz para comparar

5. *Verifique quais dos pontos*

$$(a, b) \in \{(3, -2), (-3, 2), (3, 2), (3, 5), (0.5, -\frac{1}{3}), (-4, 7)\}$$

pertence a reta de equação $2x + 3y = 0$.

6. *Verifique quais dos pontos*

$$(a, b) \in \{(-3, 2), (3, 2), (0, 2), (3, 0), (-4, 7)\}$$

satisfazem à equação $2x - 3y = 7$.

7. *Expresse, usando as variáveis g e f a frase seguinte sob forma de equação: "sempre que a gasolina sobe o preço do feijão no mercado sobre na mesma*

Figura 1.15: $y = m(x-a)+b\ ; m = -\frac{1}{2}\ ;\ P = (2,3)$

proporção". Podemos concluir que "feijão"e "gasolina"satisfazem à equação da reta?

8. *Manipule a equação* $3x + 4y + 7 = 0$ *para determinar o ponto* $(0, b)$ *em que esta reta passa. Observe que o resultado é único porque a reta corta o eixo* OY *em um só ponto.*

9. *Manipule a equação* $3x + 4y + 7 = 0$ *para determinar o ponto* $(a, 0)$ *em que esta reta passa. O resultado é único porque a reta corta o eixo* OX *em um só ponto.*

10. *Determinação de um ponto da reta*

    (a) *Escreva a equação* $3x + 4y + 7 = 0$ *para encontrar o ponto* $(3, b)$ *em que esta reta passe.*

    (b) *Escreva a equação* $3x + 4y + 7 = 0$ *para encontrar o ponto* $(a, 5)$ *em que esta reta passe.*

    (c) *Escolha um valor para* $\underline{a}$ *e manipule a equação* $3x + 4y + 7 = 0$ *para encontrar o ponto* (a, b) *em que esta reta passe.*

    (d) *Justifique por que há uma infinidade de pontos* (a, b) *em que a reta* $3x + 4y + 7 = 0$ *passa, entretanto, em todos os casos os parâmetros* A, B *serão sempre os mesmos. Enuncie o axioma da Geometria Eclidiana que rege esta questão.*

11. *Deduza da questão anterior a "quantidade de condições para determinar uma reta".*

12. *Trace o gráfico da reta que passa no ponto* $(2, 3)$ *e que tenha coeficiente angular* m*, com*

$$m \in \{-2, -1, 0.5, 0, 0.5, 1, 2\}$$

Ver figura 1.16 na página 28.

13. *Trace o gráfico de*

    (a) $3x + 2y - 3 = 0$

    (b) $x - y - 4 = 0$

    (c) $y - x - 4 = 0$

Vamos usar a equação da reta na forma $y = m(x-a)+b$. Vantagens: veja que quando escolhermos $x = a$ teremos o valor $y = b$ e portanto esta formula é ótima para o caso em que se pede "gráfico da reta que passa no ponto (a, b) com coeficiente angular "m."

A figura (fig. 1.16), página 28 mostra diversas retas com distintos coeficientes angulares m variando de -2 a 2 com passo 0.5 como se pede no exercicio 12.

1.4 Equação do círculo

A definição de *círculo*[a] é *lugar geométrico dos pontos do plano que ficam equidistantes de um ponto* P *chamado centro.* Quer dizer que círculos ficam caracterizados por duas informações

- o raio r e
- o ponto P, chamado centro.

[a] tem gente que insiste numa diferença entre *círculo* e *circunferência*, Vamos ignorar este detalhe linguístico.

Figura 1.16: Diversas retas com distintos coeficientes angulares, passando todas na origem.

Notação: $\mathcal{C}(P, r)$ vai designar neste livro o **círculo** de centro no ponto P e raio r. Por exemplo

Por exemplo, $((2,3), 4)$ designa o círculo com centro no ponto $P = (2,3)$ e raio $r = 4$.

Se um ponto qualquer do círculo tiver coordenadas (x, y) e o centro for designado por $P = (a, b)$ a distância r se calcula com Teorema de Pitágoras:

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2.$$

Veja a figura (fig. 1.17) na página 29.

Desta forma temos a equação do círculo evidenciado o raio r e o centro (a, b). Se expandirmos esta equação vamos encontrar as seguintes variantes para ela:

Figura 1.17: Distância entre dois pontos, $d(P, Q)$

O círculo $\mathcal{C}((a,b), r)$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0 \tag{1.32}$$
$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2bx + b^2 - r^2 = 0 \tag{1.33}$$
$$x^2 - 2ax + y^2 - 2by + [a^2 + b^2 - r^2] = 0 \tag{1.34}$$
$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \tag{1.35}$$
$$\text{com} \quad A = -2a \; ; \; B = -2b \; ; \; C = [a^2 + b^2 - r^2] \tag{1.36}$$
$$\tag{1.37}$$

Veja na figura (fig. 1.18) na página 30, o gráfico do $\mathcal{C}((a,b), r)$.

Muitos exercícios ou problemas envolvem a habilidade de partir da última equação para chegar a primeira:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

na qual se tem evidenciados *centro* e *raio*. Outro problema comum consiste em verificar se a equação

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

é a equação de um círculo testando A, B, C. Portanto considere como um exercício entender a sequência de contas feitas acima e comprender que a letra C compacta o valor $(a^2 + b^2 - r^2)$, que $A = -2a$, $B = -2b$:

Figura 1.18: Círculo de centro (a, b) e raior r.

Observação: 5 *Testando a equação 1.37. Observe que uma equação, para representar círculo, tem que ter os coeficientes de x^2 e de y^2* idênticos. *Também o número*

$$C - (a^2 + b^2) = -r^2$$

ver equação 1.37, tem que ser negativo pois vale

$$-r^2.$$

Como

$$-r^2 \leq 0$$

então uma outra forma de testar se uma expressão do tipo

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

é a equação de um círculo, consiste em:

- *Determinar a, b a partir de A, B;*
- $C - a^2 - b^2 \leq 0 \iff C \leq a^2 + b^2$

Exercícios: 6 *Equação do Círculo*

1. *Encontre as condições sobre A, B, C para que a equação*

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

seja a equação de um círculo.

2. *Escreva as equações do círculos indicados abaixo*

$$\mathcal{C}((-1, 1), 1)), \mathcal{C}((1, 1), 1)), \mathcal{C}((1, -1), 1)).$$

$$\mathcal{C}((-2, 1), 2)), \mathcal{C}((2, 2), 3)), \mathcal{C}((3, -1), 4)).$$

3. *Trace o gráfico dos círculos dados pela equações:*
   (a) $x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 4 = 16$
   (b) $x^2 - 4x + y^2 + 2y = -1$

4. *Verifique se as equações abaixo representam círculos:*
   (a) $3x^2 + 2x - 7 + 5y^2 + 3y - 7 = 0$
   (b) $x^2 - 6x + 4y + 15 = 0$
   (c) $x^2 - 4x + 6y + 9 = 0$

5. *Trace um círculo de raio 3 e de centro no ponto (-2,4), $\mathcal{C}((-2, 4), 3))$. Escreva sua equação.*

6. *Encontre as equação das retas que passam no centro do círculo $\mathcal{C}((-2, 4), 3))$ e pelas interseções deste círculo com o eixo OY.*

7. *Encontre os pontos de interseção dos círculos $\mathcal{C}((-2, 3), 4))$ e $\mathcal{C}((2, 3), 2))$. Hachurie a região do plano delimitada pelos dois círculos e encontre um meio para calcular a sua área.*

8. *Determine a equação da reta que passa na interseção dos círculos $\mathcal{C}((2, 3), 2))$ e $\mathcal{C}((-2, 3), 4))$.*

9. *Equação dos círculos: $\mathcal{C}((-1, 1), 1)), \mathcal{C}((1, 1), 1)), \mathcal{C}((1, -1), 1))$*

10. *Trace o gráfico de (se houver alguma impossibilidade, justifique-a).*
    (a) $3x - 2y - 5 = 0$
    (b) $3x + 2y - 5 = 0$
    (c) $-3x + 2y - 5 = 0$
    (d) $2x^2 - 12x + 18 + 2y^2 + 4y + 8 = 16$
    (e) $3x^2 - 12x + 3y^2 + 3y + = -3$

11. *família de círculos*
    (a) *Faça os gráficos de alguns círculos da família:* círculos de raio 3 com centro na reta que determinada pelo pontos

$$(-2, 4) e (2, 4).$$

Calcule a equação de um elemento genérico desta família.

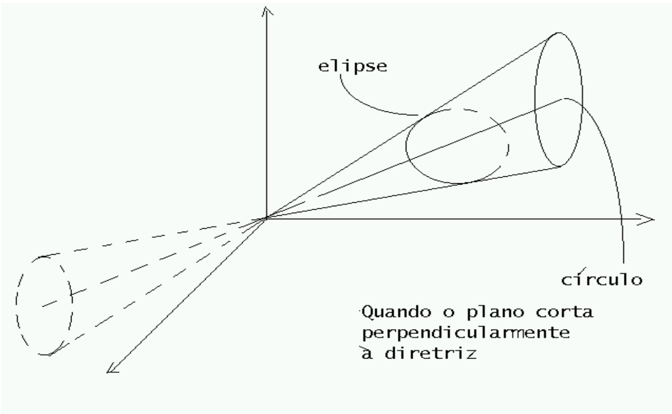

Figura 1.19: Círculo e elipse

(b) *Faça os gráficos de alguns círculos da família:* círculos de raio $\underline{r}$ e centro na reta que passa em $(-2,4)$ *3* $(2,4)$.
Calcule a equação de um elemento genérico desta família.

(c) *Faça os gráficos de alguns círculos da família:* círculos de raio $\underline{a}$ e de centro no pontos da reta que passa em

$$(-2,4)e(2,4).$$

Calcule a equação de um elemento genérico desta família.

(d) *Faça os gráficos de alguns círculos da família:* círculos de raio $\underline{a}$ e de centro no pontos da parábola que passa em

$$(-2,4),(0,-2),(2,4).$$

Calcule a equação de um elemento genérico desta família.

Observação: 6 *Visão geométrica no cone de duas folhas*
Quando um plano corta um cone de duas folhas *com uma inclinação tal que intercepta duas geratrizes o resultado do corte é uma elipse ou um círculo. Será um círculo se cortar perpendicularmente à diretriz.*
Veja na figura (fig. 1.19) na página 32 um cone de duas folhas cortado por um plano que intercepta as duas geratrizes.

1.5 Parábolas.

As parábolas tem uma definição geométrica importante para as comunicações: os sinais dos satélites de comunicação chegam ao solo "quase" numa mesma direção relativamente a uma grande área onde se encontram as *antenas parabólicas*, poristo elas estão quase todas com um mesmo direcionamento: com o eixo central colocado paralelamente a direção de emissão dos sinais.

Claro, faz bem pensar que os sinais de comunicações chegam como feixes de retas paralelas..., não é verdade, mas dá certo, porque o erro é pequeno. Aqui temos um exemplo de *aproximação* que é uma idéia com que estaremos o tempo lidando neste livro. Tente acompanhar com um gráfico. As antenas são colocadas com o eixo na direção dos satélites de modo que a emissão venha paralelamente ao eixo e se choque com a parede da antena.

Por uma lei de reflexão da Física, o ângulo de reflexão do sinal com a tangente à parábola, (leia antena), é igual ao ângulo de refração, (o ângulo antes e depois da colisão é o mesmo).

Quando estudarmos *derivadas* poderemos resolver estas questões recuperando o significado geométrico das parábolas. Agora uma parábola será uma equação da forma

$$y - b = A(x-a)^2.$$

Como dissemos anteriormente, estamos descrevendo as cônicas de forma semelhante. Sempre irá aparecer um ponto

$$P = (a,b)$$

representando uma característica fundamental de cada cônica. Observe que,

$$x = a \Longrightarrow y = b$$

e portanto o ponto $P = (a,b)$ pertence ao gráfico da parábola.

Desta forma, como no caso do círculo ou da reta, o ponto $P = (a,b)$ representa uma translação com que podemos obter o gráfico da parábola a partir de uma "parábola padrão".

- Parábola padrão $y = x^2$
- $\underline{a}$ é uma translação no eixo OX e
- $\underline{b}$ é uma translação no eixo OY.

A equação

$$y - b = (x-a)^2$$

representa uma curva que passa no ponto (a,b). Experimente fazendo $x := a$ para ver que $y = b$.

Figura 1.20: Esta parábola não corta OX.

Tomando $y := 0$ nesta expressão caimos numa *equação do segundo grau:*

$$(x-a)^2 = -b \;\; \Rightarrow \;\; x = a \pm \sqrt{-b}; \quad (1.38)$$
$$x_1 = a + \sqrt{-b}; \quad (1.39)$$
$$x_2 = a - \sqrt{-b} \quad (1.40)$$

e portanto se $-b$ for positivo teremos duas raizes reais. Na figura (fig. 1.20), página 34, você pode ver o caso em que $-b$ é negativo e a parábola não corta o eixo OX, quer dizer que a equação do segundo grau correspondente não tem *raizes reais.* Na figura (fig. 1.21), página 35, você pode ver o caso em que $-b$ é positivo e a parábola corta o eixo OX em dois pontos diferentes.

Claro, se intercambiarmos x, y ainda teremos parábolas:

$$x - a = (y-b)^2$$

veja os gráficos (fig. 1.22),(fig. 1.23) respectivamente às páginas 36 e 37

No nosso método, partimos de dois tipos de parábola-padrão:

$$y - b = (x-a)^2 \;\; \text{ou} \; x - a = (y-b)^2$$

Figura 1.21: Esta parábola tem raizes reais.

para entender todas as demais. Em ambos os caso temos uma equação de uma curva que passa pelo ponto (a, b). Verifique isto.

Como as parábolas que se podem deduzir de $x - a = (y-b)^2$ são apenas "intercâmbio das variáveis", vamos despresar este caso no restante da discussão.

Exemplo: 7 *A técnica da completação do quadrado*

Consideremos uma equação como $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ cujo gráfico desejamos desenhar. Vamos mostrar como podemos reduzir esta questão às técnicas descritas acima, isto é colocar esta equação no formato $y - b = A(x-a)^2$

Um exemplo numérico pode preceder os cálculos formais:

$$f(x) = x^2 + 3x + 6 \quad (1.41)$$
$$f(x) = x^2 + 2\tfrac{3}{2}x + \tfrac{9}{4} - \tfrac{9}{4} + 6 \quad (1.42)$$
$$f(x) = (x + \tfrac{3}{2})^2 + \tfrac{15}{4} \quad (1.43)$$
$$y - \tfrac{15}{4} = (x + \tfrac{3}{2})^2 \quad (1.44)$$

Formalmente os cálculos seriam:

$$y = Ax^2 + Bx + C \equiv \tfrac{y}{A} = x^2 + \tfrac{B}{A}x + \tfrac{C}{A} \quad (1.45)$$
$$\tfrac{y}{A} = x^2 + 2\tfrac{B}{2A}x + (\tfrac{B}{2A})^2 - (\tfrac{B}{2A})^2 + \tfrac{C}{A} = \quad (1.46)$$

Figura 1.22: Esta parábola não corta OY.

$$\frac{y}{A} = (x + (\frac{B}{2A}))^2 + [\frac{C}{A} - (\frac{B}{2A})^2] \tag{1.47}$$
$$\frac{y}{A} = (x + (\frac{B}{2A}))^2 + [\frac{C}{A} - (\frac{B}{2A})^2] \tag{1.48}$$
$$y = A(x + (\frac{B}{2A}))^2 + C - \frac{B^2}{4A} \tag{1.49}$$

Se considerarmos $y = 0$ na última linha, poderemos recuperar a chamada fórmula de Bascara:

$$y = A(x + (\frac{B}{2A}))^2 + C - \frac{B^2}{4A} = 0 \tag{1.50}$$
$$A(x + (\frac{B}{2A}))^2 = \frac{B^2}{4A} - C = \frac{B^2-4AC}{4A} \tag{1.51}$$
$$(x + (\frac{B}{2A}))^2 = \frac{B^2-4AC}{4A^2} \tag{1.52}$$
$$x + (\frac{B}{2A}) = \pm sqrt\frac{B^2-4AC}{4A^2} \tag{1.53}$$
$$x + (\frac{B}{2A}) = \frac{\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A} \tag{1.54}$$
$$x = -\frac{B}{2A} + \frac{\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A} \tag{1.55}$$
$$x = \frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A} \tag{1.56}$$

Exercícios: 7 *Parábolas e suas equações*

1. *Observe as simétrias e o sinal da equação $y = x^2$, e trace o seu gráfico.*
2. *Deduza por translações adequadas os gráficos das parábolas:*

Figura 1.23: Esta parábola corta OY.

   (a) *Trace o gráfico da parábola $y = (x-3)^2$.*
   (b) *Trace o gráfico da parábola $y = (x+4)^2$.*
   (c) *Trace o gráfico da parábola $y - 2 = (x+4)^2$.*

3. *Observe as simétrias e o sinal da equação $x = y^2$, e trace o seu gráfico.*
4. *Deduza por translações adequadas os gráficos das parábolas:*
   (a) *Trace o gráfico da parábola $x = (y-3)^2$.*
   (b) *Trace o gráfico da parábola $x = (y+4)^2$.*
   (c) *Trace o gráfico da parábola $x - 2 = (y+4)^2$.*
5. *Completando os quadrados reduza as equações seguintes ao formato $y-b = (x-a)^2$ e trace seus gráficos. Ver o exemplo 7, na página 35.*
   (a) *Trace o gráfico da parábola $y = x^2 + 4x + 4$.*
   (b) *Trace o gráfico da parábola $y = x^2 + 4x + 6$.*
   (c) *Trace o gráfico da parábola $y = -x^2 - 4x - 6$.*
   (d) *Trace o gráfico da parábola $y = x^2 + 4x + 2$.*
   (e) *Trace o gráfico da parábola $y = x^2 + 4x + 16$.*
   (f) *Trace o gráfico da parábola $y = -x^2 - 4x - 16$.*

6. *Completando os quadrados reduza as equações seguintes ao formato* $x-a = (y-b)^2$ *e trace seus gráficos.*
   - (a) *Trace o gráfico da parábola* $x = y^2 + 4y - 4$.
   - (b) *Trace o gráfico da parábola* $x = y^2 + 4y + 16$.
   - (c) *Trace o gráfico da parábola* $x = -y^2 - 4y - 16$.
   - (d) *Trace o gráfico da parábola* $x = y^2 + 4y + 12$.
7. *Completando os quadrados reduza as equações seguintes ao formato* $x-a = (y-b)^2$ *e trace seus gráficos.*
   - (a) *Trace o gráfico da parábola* $2y = x^2 + 4x - 4$.
   - (b) *Trace o gráfico da parábola* $3x = y^2 + 4y + 16$.
   - (c) *Trace o gráfico da parábola* $y/2 = -x^2 - 4x - 16$.
   - (d) *Trace o gráfico da parábola* $4x = y^2 + 4y + 12$.
8. *Encontre os pontos de interseção dos gráficos das parábolas* $y = x^2+4x+2$ *e* $3y = x^2 - 4x + 2$.
9. *Hachurie a região delimitada pelas parábolas do item anterior. Esta região tem "área"? Se tiver encontre um valor aproximado para a mesma.*

1.6 As cônicas

Já estamos falando de cônicas há algum tempo: retas e círculos. Agora vamos falar da origem geométrica destas curvas.
As cônicas tem um valor *histórico*: as órbitas dos planetas são aparentemente elípticas. Elas tem também um outro valor *natural*, por um capricho da Natureza, círculos e esferas representam o equilíbrio das forças e as retas, que são círculos degenerados, também representam este equilíbrio. Fora do equilíbrio tudo é elipse, parábola ou hipébole, dependendo de pequenas variações sobre as condições. E o que não for reta, círculo, elipse, parábola ou hipérbole pode ser aproximado por uma dessas curvas...
Continuando a *Natureza em seus caprichos*, as cônicas surgem como as seções planas de um cone de duas folhas, como as figuras finais deste capítulo pretendem mostrar.
Vamos ver como transformar cônicas em outras cônicas e as conseqüências dessas transformações sobre as equações. Mas o nosso objetivo aqui é modesto, queremos apenas construir os métodos necessários ao Cálculo.

As curvas que estamos estudando neste capítulo, *as cônicas*, têm uma origem geométrica interessante. Fora a ligação destas curvas com os fenômenos da natureza, existe uma ligação delas com um objeto geométrico, o *cone de duas folhas*.

Você pode construir um *cone de duas folhas*, formado de dois *cones* semelhantes que se opõem pelo vértice. Outra forma de obter *cones* pode ser descrita pelo seguinte "algoritmo":

1. considerar dois triângulos isósceles semelhantes e opostos pelos vértices;

Figura 1.24: Círculo ou elipse

2. extender ambos os triângulos indefinidamente na direção da bissetriz **r** do ângulo formado pelos lados iguais, obtendo assim a região **P** formada de duas "regiões angulares opostas pelo vértice";
3. considerar a bissetriz **r** como um eixo de rotação e rodar a região **P** em torno de **r** gerando assim uma superfície pela revolução dos lados da região angular**P**

Veja, por exemplo, (fig. 1.25) página 40, e *cortar-lo* com planos, os resultados serão *círculos, elipses, parábolas ou hipérboles* dependendo de como a seção for feita:

- círculos se o plano for perpendicular ao eixo do cone. Ver (fig. 1.24) página 39.
- elipses se o plano não for perpendicular ao eixo do cone, mas tenha inclinação menor do que as *diretrizes* do cone. Ver (fig. 1.24) página 39.
- parábola se o plano tiver *exatamente* a inclinação de uma das diretrizes. Ver (fig. 1.25) página 40.
- hipérbole se o plano tiver uma inclinação que fique *entre* as inclinações de duas diretrizes opostas. Ver (fig. 1.26) página 41.

Você pode construir *cones de duas folhas* com papel e experimentar estes quatro casos para ver o resultado geométricamente. Não é nada fácil fazer isto...

Figura 1.25: Parábola, seção cônica

Menos óbvia é a passagem do geométrico para o algébrico e vice-versa. O caso mais simples é o do círculo, porque os cones são construidos por rotação de uma reta em torno de um eixo, logo, se os cortarmos, perpendicularmente ao eixo, por um plano, o resultado será um círculo. Para entender os outros três casos é preciso mais trabalho e não discutiremos este tópico geométrico aqui. Nos limitaremos a esta observação.

1.6.1 A hipérbole

Vamos continuar no plano e definir, algébricamente, como fizemos nos outros casos, o que é uma hipérbole.

Considere a equação do círculo e a transformação:

$$(y-b)^2 + (x-a)^2 = r^2 \ \rightarrow \ (y-b)^2 - (x-a)^2 = r^2$$

uma troca de sinal no termo em x^2.

Se *explicitarmos* a variável y teremos:

$$(y-b)^2 = r^2 + (x-a)^2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{r^2 + (x-a)^2} + b$$

duas funções,

$$y = f_1(x) = b + \sqrt{r^2 + (x-a)^2} \ ; \ y = f_2(x) = b - \sqrt{r^2 + (x-a)^2}$$

Observe que não hínteresse em considerarmos $r \leq 0$ uma vez que sempre o vamos considerar r ao quadrado. Vamos simplificar a discussão considerando $r \geq 0$

Figura 1.26: Hipérbole

1. <u>O domínio, relativamente ao eixo OX</u> desta equação é a reta inteira porque sempre
$$r^2 + (x-a)^2 \geq 0$$
então o gráfico se compõe de duas funções definidas para todos os valores de $x \in \mathbf{R}$. Dizemos que o gráfico se compões de dois ramos, o gráfico de cada uma das funções é um dos ramos.
$$y = f_1(x) = b + \sqrt{r^2 + (x-a)^2} \qquad (1.57)$$
$$y = f_2(x) = b - \sqrt{r^2 + (x-a)^2} \qquad (1.58)$$

2. O ponto <u>$x = a$</u> é um ponto de simetria. Os valores de f_1, f_2 se repetem à direita e à esquerda de $x = a$. No ponto $x = a$ temos
$$y = f_1(a) = b + r \qquad (1.59)$$
$$y = f_2(a) = b - r \qquad (1.60)$$

3. Tem sentido considerarmos $r = 0$ neste caso
$$y = b + \sqrt{(x-a)^2} = b + |x-a| \qquad (1.61)$$
$$y = b - \sqrt{(x-a)^2} = b - |x-a| \qquad (1.62)$$
o gráfico se compõe de $y = b \pm |x-a|$. Faça o gráfico para acompanhar o raciocínio. Este gráfico será importante no resto da discusssão. As duas que você deve ter obtido se chamam *assíntotas* da hipérbole.

4. as assíntotas Do exposto acima há duas retas que é importante desenhar para a construção deste gráfico:

$$y = b \; ; x = a$$

a primeira separa os dois ramos da hipérbole e a outra é o eixo de simetria da hipérbole. Veja o gráfico feito à mão na figura (fig. 1.27) página 42,

Figura 1.27:

5. O efeito de b:

    - Se $b = 0$ deduzimos, para cada valor de x, correspondem dois valores simétricos de y, temos, pois, um gráfico formado por duas curvas simétricas em relação ao eixo OX.
    - Se $b \neq 0$

Os dois pontos $(a, b + r), (a, b - r)$ pertencem ao gráfico e determinam cada um dos dois *ramos* da hipérbole. Como os ramos são simétricos, basta nos preocuparmos com a determinação de um deles, deduzindo o outro por simétria. O gráfico das assíntotas dirige a construção geral do gráfico, como não podia deixar de ser, é o signficado destas retas, quando $r = 0$

$$y = \pm\sqrt{(x-a)^2} = \pm|x - a|.$$

Faça o seu gráfico. Corresponde a cortar o cone de duas folhas passando um plano pela origem e paralelo a uma das diretrizes. A figura mostra dois ramos de módulo simétricos relativamente à reta $x = a$.

Exercícios: 8 *Construção geométrica de uma hipérbole Material necessário: régua e compasso. Acompanhe com um gráfico o raciocínio que faremos que o conduzirá à construção geométrica da hipérbole.*

1. *Tome um ponto arbitrário em uma destas retas e determine sua projeção $(x, 0)$ sobre OX.*
2. *Veja que que $\sqrt{r^2 + (x-a)^2}$ é a distância desta projeção até o ponto (a, r) ou até $(a, -r)$.*
3. *Conclua que se, com um compasso, transferirmos a distância*

    $$\sqrt{r^2 + (x-a)^2}$$

    para o ponto $(x, 0)$ levantando alí um segmento de reta perpendicular ao OX com este comprimento, vamos encontrar o ponto (x, y) sobre a hipérbole.
4. *O ponto correspondente sobre o outro ramo da hipérbole será obtido se dirigirmos o segmento de reta perpendicularmente ao OX no outro sentido.*
5. *O caso em que $b \neq 0$. Se $b \neq 0$ então os dois ramos do gráfico passam nos pontos $(a, r + b), (a, -r + b)$. Conclua que gráfico todo, construido no item anterior, deverá ser translatado, paralelamente ao eixo OY de b.*
6. *Faça alguns exemplos com $r \in \{0, 0.1, 0.2, 0.5, 1\}$ para concluir que, quanto maior for r menos "bicudos" ficarão os dois ramos em cima da reta de simétria $x = a$. Posteriormente, com derivadas, se pode mostrar que se $r \neq 0$ os ramos tem uma reta tangente no ponto (a, r). Veja os gráficos correspondentes na figura 1.28 página 44.*

    Definição: 4 *Vértices e diretriz da hipérbole*

    Os dois pontos $(a, \pm r)$ se chamam vértices da hipébole *e a reta de simétria, $x = a$ se chama* diretriz da hipérbole. *indexhipérbole!diretriz*

7. *Se fizermos uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ no gráfico de $(y - b) - (x - a)^2 = r^2$ isto equivale a*

    - *Considerar a nova diretriz $y = a$.*
    - *Os vértices passam a ser $(a, \pm r)$.*
    - *A equação, consequentemente será*

    $$(x - b)^2 - (y - a)^2 = r^2$$

Figura 1.28: Gráficos de hipérboles

A conclusão do último exercício é que as equações

$$(x-b)^2 - (y-a)^2 = r^2 \ ; \ (y-b)^2 - (x-a)^2 = r^2$$

são equações de hipéboles. Desejamos ver o caso geral para as equações das hipérboles, mas isto se reduz a estudar de modo geral qualquer das cónicas que será o nosso próximo objetivo.

1.6.2 Elipse

Como você"pode ver" no desenho (fig. 1.24), página 39, uma elipse é um círculo deformado. Elas podem ter dois tipos de deformação, veja também (fig. 1.29), página 45, onde você pode ver duas elipses e dois círculos. A elipse (2) pode ser vista como deformação tanto do círculo maior como do círculo menor e os "coeficientes de deformação" estão indicados nos eixos.

Quer dizer que se usarmos coeficientes de deformação diferentes para o eixo OX e para o eixo OY o resultado é uma elipse:

$$(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = r^2$$

é uma elipse com coeficientes de deformação a, b.

Observe que podemos ver esta elipse como "um círculo de centro na origem deformado ao longo do eixo OX por a e deformado ao longo do eixo OY por b. Deformamos o círculo:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Figura 1.29: Elipses são deformações de círculos

Veja este nova equação:

$$(\frac{(x-x_1)}{a})^2 + (\frac{(y-y_1)}{b})^2 = r^2$$

que podemos dizer que foi uma deformação círculo

$$(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 = r^2$$

que é o círculo de centro no ponto (x_1, y_1).

Observação: 7 *Coeficientes de deformação*
Veja, finalmente que estamos cometendo um erro: "esquecemos" de levar em conta o raio e com isto falamos de coeficientes de deformação "absolutos". Se o raio for maior ou menor a deformação será diferente então os coeficientes de deformação são:

$$\frac{a}{r} \ ; \ \frac{b}{r}$$

Exercícios: 9 *Círculos e elipses*

1. *Trace o círculo de raio 2 e centro na origem e as quatro elipses com coeficientes de deformação* $\{(0.5,1),(1,0.5),(1,2),(2,1)\}$, *relativamente ao círculo.*

2. *distância focal*

(a) Outra forma de ver elipses consiste em considerar dois pontos chamados focos e um número r positivos tal que $2r$ seja maior do que a distância entre os focos. Prendendo as pontas de um cordão de comprimento $2r$ nos focos os pontos cujas distâncias aos dois focos somem $2r$ será uma elipse, faça o desenho.

(b) Verifique que se os dois focos coïncidirem, se tem um círculo de raio $\frac{r}{2}$.

(c) Verifique que o segmento de reta que une os dois focos é uma elipse. Uma elipse degenerada.

(d) Verifique que para qualquer das distorções a, b de uma elipse, ver a (fig. 1.29), página 45, valem as equações:

$$a^2 + p^2 = r^2 \ ; b^2 + p^2 = r^2$$

em que p é a metade distância entre os focos e r é o número definido acima.

(e) Conclua que as "constantes" que definem uma elipse são:

i. A distância focal, $2p$, (distância entre os focos).

ii. Uma das distorções.

Sugestão, mostre que a outra distorção se deduz da primeira e da distância focal.

(f) Uma elipse tem por focos os pontos $(p, 0), (-p, 0)$ sendo a soma das distâncias de um ponto qualquer aos focos igual a $2r$. Mostre que a equação desta elipse é:

$$(x-p)^2 + (x+p)^2 + 2y^2 = r^2 \equiv 2x^2 + y^2 = r - 2p^2$$

e que $r - 2p^2 > 0$.

1.6.3 A equação da elipse

Vamos calcular a equação da elipse e na próxima subseção faremos um estudo gráfico de todas as secções cônicas mostrando as seções cônicas aparecendo como segmentos de reta relativamente à projeção do cone no plano.

Construcao das cônicas

Acompanhe a leitura e compare com os exercicios visualisando a figura (fig. 1.30), página 47.

Há 5 tipos de legendas,$\circ o$, p,l,pal,e que significam respectivamente: $\circ o$, *vértice do cone*, p, *perpendicular ao eixo*, l, *laterais do cone*, pal, *paralela a uma das laterais do cone*, e, *eixo do cone*. A figura (fig. 1.30), página 47, representa a secções do cone pelo plano XOY contendo, portanto, o eixo do cone.

A figura (fig. 1.31), página 47

Figura 1.30: Círculo ou elipse

Figura 1.31: Tipos de cônicas sobre as regiões ou retas.

Capítulo 2

Números e estrutura.

Aqui começa o Cálculo!
Cálculo Diferencial e Integral é o estudo das funções sob o ponto de vista de diferenciabilidade e integrabilidade. Quer dizer que, com duas ferramentas, a *derivada* e a *integral*, se procura tirar informações das funções que representam os fenômenos do mundo real a partir de alguma forma de simulação.
Mas as funções, num determinado sentido, são uma generalização dos números, e é pelos número que vamos começar, digamos assim, vamos tratar do "subterranêo" do Cálculo, "Com os números", que são os *objetos escondidos* por trás dos verdadeiras *objetos*, as funções às quais se aplicam as *ferramentas* de que falamos acima, as "derivadas" e as "integrais".
Para construir os números precisamos do *limite*. O difícil desta matéria se encontra no fato de que os *números reais*, se confundem com o método de sua construção que é o *limite*, isto será visto nas últimas seção deste capítulo.

2.1 Números naturais, inteiros e estrutura.

No `Cálculo` estamos permanentemente lidando com dois *objetos* básicos: **números, funções**. Esta lista de exercícios tem o objetivo de trabalhar com o conceito de número natural e número inteiro e as estruturas algébricas que estes números têm. Observe que este assunto sozinho é uma disciplina, a *Álgebra*, e portanto aqui seu espaço tem que ser reduzido como uma breve introdução.

Os números naturais ficam definidos habitualmente pelos axiomas de Peano.

Na verdade não é uma definição de número natural e sim de uma estrutura que os números naturais também têm. A construção de Peano é idêntica ao método de demonstração por indução finita, quer dizer que os números naturais são o conjunto natural de indexão de um processo indutivo. Estas palavras de fato ficam vazias se todos estes conceitos não forem efetivamente trabalhados, mas nós o faremos aqui, de forma precária e informativa, deixando apenas a lembrança deles para que o leitor interessado os procurem em um livro de Álgebra.

2.1.1 No começo eram os números naturais.

A construção lógica dos números naturais é tão árdua que muitos autores preferem considerá-

los conhecidos como ponto de partida. Faremos o mesmo.

1. Quais são as propriedades que você pode listar para o seguinte objeto $(\mathbf{N}, +)$.
2. Quais são as propriedades que você pode listar para o seguinte objeto $(\mathbf{N}, \cdot)$.
3. Quais são as propriedades que do objeto $(\mathbf{N}, \leq, +)$.
4. Quais são as propriedades que de $(\mathbf{N}, \leq, \cdot)$.
5. Quais são as propriedades que de $(\mathbf{N}, +, \cdot, \leq)$.

2.1.2 Depois vieram os números inteiros relativos.

Podemos definir o conjunto $-\mathbf{N}$ como os dos "objetos" que completam $\mathbf{N}$ de formas que a equação

$$x + a = 0$$

sempre tenha solução, para todo $a \in \mathbf{N}$, e definir

$$\mathbf{Z} = -\mathbf{N} \cup \mathbf{N}.$$

Os dois conjuntos se passam a chamar, $\mathbf{N}$ é o conjunto dos *números inteiros positivos*, e $-\mathbf{N}$ é o conjunto dos *números inteiros negativos*. Dois *adjetivos* apenas...
Depois devemos estender a $\mathbf{Z}$ os métodos existentes em $\mathbf{N}$, que são as "quatro operações", e a relação de ordem.

Cabe repetir a observação já feita antes, estes tópicos pertencem a Álgebra, aqui eles apenas estão sendo registrados.

Exercícios: 10 *Estensão a* $\mathbf{Z}$ *dos métodos de* $\mathbf{N}$.

1. *Estenda a adição e a multiplicação existentes em* $\mathbf{N}$ *ao novo conjunto* $\mathbf{Z} = -\mathbf{N} \cup \mathbf{N}$.
2. *Estenda a relação de ordem* $\leq$ *ao conjunto* $\mathbf{Z}$.
3. *Quais são as propriedades que você pode listar para o seguinte objeto* $(\mathbf{Z}, \cdot)$.
4. *Quais são as propriedades que do objeto* $(\mathbf{Z}, \leq, +)$.
5. *Quais são as propriedades que de* $(\mathbf{Z}, \leq, \cdot)$.

2.1.3 Estrutura álgebrica do relógio.

Este assunto tem mais seriedade do que esta lista de exercícios pode pretender oferecer dentro do contexto em que estamos nos propondo a trabalhar. Se você quiser entender o que acontece de fato com o "relógio", um *grupo finito*, procure um texto de Álgebra onde este assunto é tomado com toda a seriedade que ele merece.

Exercícios: 11 *Aritmética no relógio*

1. *Considere o conjunto* $\mathcal{H} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 11\}$ *das horas. Quais são as propriedades que você pode listar para* $(\mathcal{H}, +)$ *?*

2. *Resolvendo equações em* $(\mathcal{H}, +)$. *Resolva as seguintes equações em* $(\mathcal{H}, +)$.

   (a) $3 + x = 12$

   (b) $7 + x = 5$

3. *Resolvendo equações em* $(\mathcal{H}, +)$. *Tem sentido a equação* $3x + 7 = 1$ *em* $(\mathcal{H}, +)$?

4. *Resolvendo equações em* $(\mathcal{H}, +)$. *Tem sentido a equação* $x + 27 = 1$ *em* $(\mathcal{H}, +)$?

2.1.4 O anel dos inteiros.

Exercícios: 12 *Equações inteiras*

1. *Quais são as propriedades que você pode listar para o objeto* $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$?

2. *Resolva as seguintes equações em* $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$, *se for possível. Se não for possível, indique "porque".*

   (a) $x + 7 = 4$

   (b) $3x = 12$

   (c) $3x + 4 = 9$

   (d) $x - 5 = 2$

3. *Quais são as propriedades que você pode listar para o objeto*

$$(\mathbf{Z}, +, \cdot, \leq)?$$

4. *Resolva as seguintes desigualdades e faça uma representação geométrica da cada uma delas:*

   (a) $x + 7 \leq 4y$

   (b) $3x \geq 12y$

   (c) $3x + 4y \leq 9$

   (d) $x - 5y \geq 2$

5. *Resolva as seguintes desigualdades:*

$$a) \left\{ \begin{array}{c} x + 7 \leq 4y \\ 3x \geq 12y \end{array} \right. \qquad b) \left\{ \begin{array}{c} 3x + 4y \leq 9 \\ x - 5y \geq 2 \end{array} \right.$$

2.2 Números racionais.

Os números racionais, foram obtidos dos números inteiros por uma simples complementação algébrica: se criaram os inversos multiplicativos de todos números, com exceção do zero. Comparando com o que fizemos com os inteiros, inventamos o conjunto $\frac{1}{\mathbf{Z}^*}$ que contém os inversos multiplicativos de todos os inteiros, excetuado o zero, quer dizer que em $\mathbf{Z}U\frac{1}{\mathbf{Z}^*}$ a equação

$$ax = 1$$

tem solução para todo $a \neq 0$; $a \in \mathbf{Z}U\frac{1}{\mathbf{Z}^*}$.

Com isto as duas estruturas $(\mathbf{Q}, +), (\mathbf{Q}^*, \cdot)$ ficaram completas formando o que chamamos *o corpo dos racionais*:

$$\mathbf{Q} \supset \mathbf{Z}U\frac{1}{\mathbf{Z}^*}.$$

Observe que não escrevemos $\mathbf{Q} = \mathbf{Z}U\frac{1}{\mathbf{Z}^*}$, porque há números racionais, como $\frac{3}{2}$ que não se encontram no conjunto à direita.

A expressão "corpo dos números racionais" resume um conjunto de mais de nove propriedades, ou leis, que nos permitem por exemplo resolver equações, veja um exemplo.

Exemplo: 8 *Solução de uma equação*

$$3x + 7 = 9 \tag{2.1}$$
$$(3x + 7) + (-7) = 9 + (-7) \text{ existência do inverso aditivo} \tag{2.2}$$
$$3x + (7 + (-7)) = 2 \text{ propriedade associativa da adição} \tag{2.3}$$
$$3x = 2 \tag{2.4}$$
$$\frac{1}{3}(3x) = \frac{2}{3} \text{existência do inverso multiplicativo} \tag{2.5}$$
$$(\frac{1}{3}3)x = \frac{2}{3} \text{propriedade associativa da multiplicação} \tag{2.6}$$
$$x = \frac{2}{3} \tag{2.7}$$

Observe que na prática algumas dessas passagens são omitidas, por exemplo, esta resolução usualmente fica assim:

$$3x + 7 = 9 \tag{2.8}$$
$$3x+ = 2 \tag{2.9}$$
$$x = \frac{2}{3} \tag{2.10}$$

e não há nenhum defeito em resolver equações de forma resumido, desde que se entenda o que se está fazendo, *e é por esta razão que apresentamos aqui os fatos e as razões dos mesmos.*

O processo de construção $\mathbf{Z} \to \mathbf{Q}$ se assemelha em muito ao processo com que saimos de $\mathbf{N}$ para conseguir $\mathbf{Z}$.

O resultado desta construção é $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$.

Os *números racionais* tem propriedades comuns com os *números reais*. Vamos usar as *propriedades geométricas* dos racionais e voltaremos a falar delas mais em detalhe quando tratarmos dos números reais.

Uma *propriedade geométrica* dos racioanis é a seguinte:

Teorema: 3 *Propriedade da média*
Dados $a, b \in \mathbf{Q}$; $\exists c \in \mathbf{Q}$; $a \leq c \leq b$.

Um valor possível para c é $\frac{a+b}{2}$. A razão de chamarmos esta propriedade de *geométrica* é que ela vale para uma reta na geometria euclidiana com exatamente a mesma redação. Veremos mais sobre isto adiante, com os números reais. Vamos terminar esta introdução com uma simbologia adequada. O conjunto dos "pontos" que ficam entre a e b é chamado de `segmento` ou `intervalo`, e designado por $[a, b]$ que se lê "intervalo ab".

Exemplo: 9 *E $\frac{1}{7}$ como fica em decimal?*

As calculadoras escrevem os números em formato diferente deste que acabamos de anunciar. Um número, na calculadora, aparece como uma sucessão *de algarismos:*

$$23.445.$$

Como tudo em nosso processo cultural há aqui um código que serve para decifrar o significado desta expressão.

O código é notação decimal, neste caso. Um número em decimal é uma espécie de polinômio:

$$23.445 = 2 * 10 + 3 * 10^0 + 4 * 10^{-1} + 4 * 10^{-2} + 5 * 10^{-3}$$

ou então, como estamos falando de frações

$$23 + \frac{4}{10} + \frac{4}{100} + \frac{5}{1000}.$$

Qualquer fração pode ser expressa nesta forma. Algumas com maior facilidade, outras com um pouco mais de trabalho. Por exemplo, as frações cujo denominador seja uma potência de 10 tem uma expressão fácil:

$$\frac{45}{100} = \frac{40}{100} + \frac{5}{100} = \frac{4}{10} + \frac{5}{100} = 0.4 + 0.05 = 0.45$$

A regra consiste em ir descobrindo, artesanalmente, que pedacinho do tipo $\frac{x}{10^n}$ pode ser adicionado para melhor aproximar uma fração. Vejamos o caso $\frac{1}{7}$.

- *Primeiro extraimos os inteiros da fração, no caso é zero:* 0. *O ponto divide a parte inteira da* fração[1] própria.

- *Depois vamos verificar quantas vezes $\frac{1}{10}$ está contido no que sobrar que ainda é $\frac{1}{7}$ porque ainda não tiramos nada. Isto significa divisão:*

$$\frac{1}{7} \div \frac{1}{10} = 10 \div 7 = 1, resto = 3.$$

  e você deve ir montando a o algoritmo da divisão para acompanhar o que estamos dizendo.

- *Vamos agora verificar quantas vezes $\frac{1}{100}$ está contido no que sobrou:*

[1]Denominação imprópria, esta de fração própria...

  – *o que sobrou:*

$$\frac{1}{7} - \frac{1}{10} = \frac{10}{70} - \frac{7}{70} = \frac{3}{70}$$

  – *nova divisão:*

$$\frac{3}{70} \div \frac{1}{100} = \frac{300}{70} = \frac{30}{7}$$

  – *tradução algoritmica:*
  e vemos que o algoritmo traduz, acrescentamos um zero ao resto e o voltamos a dividir por 7, achando agora 4 e resto 2.

- *Em suma:*

$$\frac{1}{7} \approx 0 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{2}{1000} + \frac{8}{10000} + \frac{5}{100000} + \frac{7}{1000000} =$$
$$0 + 0.1 + 0.04 + 0.002 + 0.0008 + 0.00005 + 0.000007 = 0.142857$$

  e como o último resto obtido foi 1, o processo agora vai se repetir voltando a aparecer os restos 1,3,2,6,4,5,1,3,2,6,4,5, . . . sucessivamente.

Quando isto ocorre dizemos que temos uma dízima periódica:

$$\frac{1}{7} = 0.(142857)... = \frac{142857}{1000000} + \frac{142857}{1000000^2} + \cdots$$

em que podemos reconhecer uma `progressão geométrica` *de razão $\frac{1}{1000000}$ cujo primeiro termo é $\frac{142857}{1000000}$.*

A soma dos termos de uma progressão geométrica é dada por uma fórmula que se origina da seguinte identidade:

$$(1 - r)(1 + r + r^2 + \cdots + r^n) = 1 - r^{n+1}$$

que, dividida por $1 - r$ quando $r \neq 1$ nos dá:

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Esta série converge, *o segundo membro* converge *para zero sendo seu* limite *o* limite *do segundo membro, $\frac{1}{1-r}$. Como existe um primeiro termo r_0 a fórmula acima fica:*

$$r_0(1 + r + r^2 + \cdots + r^n) = r_0\frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = r_0\frac{1}{1 - r} = \frac{r_0}{1 - r}$$

No caso de $\frac{1}{7}$ temos:

$$\frac{1}{7} = \frac{0.142857}{1 - r} = \frac{0.142857}{1 - \frac{1}{1000000}} =$$

$$\frac{0.142857}{\frac{1000000-1}{1000000}} == \frac{142857}{1000000-1} = \frac{142857}{999999} =$$

O número 0 é idenficado como sendo "a parte não periódica seguida de um periódo, no numerador. No denominador tantos 9 quantos forem os algarismos do periódo.

Em geral, se tivermos

$$r_1 \dots r_n.s_1 \dots s_m(a_1 \dots a_p) \dots$$

uma dízima periódica formada de uma parte não periódica

$$r_1 \dots r_n.s_1 \dots s_m$$

tendo por periódo $(a_1 \dots a_p)$ *equivale a progressão geométrica*

$$r_1 \cdots r_n.s_1 \cdots s_m a_1 \cdots a_p(1 + \frac{1}{10^p+} + (\frac{1}{10^p+})^2 + \cdots$$

em que temos:

- *a parte inteira,* $\underbrace{r_1 \cdots r_n}$
- *a parte decimal não periódica,* $\underbrace{s_1 \cdots s_m}$;
- *e o período* $\underbrace{a_1 \cdots a_p}$

Esta progressão geométrica é igual a

$$r_1 \cdots r_n.s_1 \cdots s_m a_1 \cdots a_p(\frac{1}{1-r})$$

em que

$$r = \frac{1}{10^p} \Rightarrow \frac{1}{1-\frac{1}{10^p}} = \frac{10^p}{10^p - 1} = \frac{10^p}{\underbrace{9\cdots 9}_{p}}.$$

O termo inicial tem $p+m$ *casas decimais. Se multiplicarmos o numerador e o denominador de* $\frac{10^p}{\underbrace{9\cdots 9}_{p}}$ *por* 10^m *esta fração nao se altera e temos:*

$$r_1 \cdots r_n.s_1 \cdots s_m a_1 \cdots a_p \frac{10^{p+m}}{\underbrace{9\cdots 9}_{p}\underbrace{0\cdots 0}_{m}}$$

Quando multiplicarmos o termo inicial pela última fração, a potência de 10 no numerador vai fazer desaparecer a parte decimal do termo inicial ficando:

$$\frac{r_1 \dots r_n s_1 \dots s_m a_1 \dots a_p}{\underbrace{9\cdots 9}_{p}\underbrace{0\cdots 0}_{m}}$$

cuja leitura é: no numerador temos a parte não periódica seguida de um período, e no denominador tantos 9 quantos forem os algarismos do período seguidos de tantos zeros quantos forem os algarismos da parte decimal não periódica.

Exercícios: 13 *Álgebra dos números racionais*

1. *Resolva as equações abaixo em* $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$.

$$3x - 4 = 7 \qquad \frac{4}{3}x - \frac{3}{2} = \frac{2}{5}$$

2. *Trace uma* reta orientada *e nela marque os números inteiros relativos. Marque também os seguintes números racionais:*

$$-\frac{1}{3} \qquad -0.5 \qquad -7 \qquad \frac{4}{3} \qquad 1.3$$

3. *Desenhe o intervalo* $[-1, 1]$ *e nele marque os pontos:*

$$-0.5 \qquad -0.3 \qquad -0.1 \qquad 0.2 \qquad 0.5 \qquad 0.7$$

4. *Desenhe uma* reta orientada . *A partir da origem trace o segmento da reta* $\overline{OP}$ *que faça com a* reta orientada *o ângulo* $\frac{\pi}{6}$.

   Subdivida $\overline{OP}$ *em 7 pedaços iguais marcando os pontos* $P_1, P_2, \dots, P_7 = P$.

   Una P ao número 1 da reta orientada *por um semento de reta e trace segmentos de reta paralelos a* $\overline{P1}$ *passando por cada um dos pontos* P_i.

   Verifique qual é o número racional representado pelo ponto que cada um dos segmentos de reta assim traçados, determina na reta orientada .

2.3 Construção dos números reais

Construção geométrica dos reais

A construção geométrica dos números reais $\mathbf{R}$, mostra que a passagem para estes novos números envolve uma modificação qualitativa, foi aqui que os gregos *tropeçaram* nos números irracionais, que chamaram de *incomensuráveis.* Um número real será uma sucessão convergente de números racionais. Vamos explorar aqui o *processo* geométrico de construção dos números reais. Em outra lista de exercícios futura, faremos um outro tipo de construção mais *algébrica.*

Uma forma rápida de descrever os números reais consiste em dizer que els são formados

- das dízimas periódicas, (os números racionais),
- e as dízimas não peritódicas, (os números irracionais).

As dízimas periódicas são as frações, as não periódicas *podem ser aproximadas por frações,* é o que se faz com um *arrendondamento.*

Nesta lista de exercícicios vamos ver os números reais através de suas propriedades. A desigualdade, por exemplo, tem as seguintes leis (a listagem não é exaustiva):

Hipótese: 1 *Propriedades da desigualdade*

- <u>tricotomia</u> *Dados dois números reais* a, b *vale apenas uma das seguintes relações:*

1. $a < b$.
2. $a = b$.
3. $a > b$.

- *Dados dois números* **sempre** *tem outro número entre eles.*
- *Dados dois números* **sempre** *tem um terceiro maior do que os dois primeiros e um quarto menor do que eles.*

Estas propriedades permitem que comparemos os números reais com uma reta. Esta teoria pode ser desenvolvida de forma muito perfeita, inclusive usando esta *representação geométrica* dos números para fazer a estensão da adição dos racionais para os pontos da reta, de modo que vamos considerar uma reta qualquer como um exemplo do conjunto dos números reais, **R**.

As operações, adição e multiplicação, podem ser construidas geométricamente e podemos mostrar que elas são as "mesmas" definidas para os racionais e os inteiros, logo uma "estensão". Não faremos isto, mas lhe vamos sugerir o caminho nos exercícios.

Definição: 5 *Reta dos números*
Uma reta qualquer na qual se tenha escolhido um ponto 0 para representar o zero, e um ponto 1 para representar o elemento neutro da multiplicação, será considerado uma exemplo *do conjunto dos números reais,* **R**. *Estas escolhas definem qual é o conjuntos dos números reais positivos e dos negativos. Um reta onde foram feitas estas escolhas se chama* `reta orientada`.

Como no caso dos números inteiros e racionais, vamos usar intuitivamente esta teoria que pode ser desenvolvida cuidadosamente mas cujo desenvolvimento não cabe neste projeto. Os exercícios desta seção sugerem um pouco do desenvolvimento que poderia ser feito.

Exercícios: 14 *A reta dos números reais*

1. *Traduza as propriedades da desigualdade acima para os pontos de uma reta.*
2. *Use dois exemplares da* `reta orientada` *para definir a soma de números reais.*
3. *Use dois exemplares da* `reta orientada` *concorrentes no zero, para definir o produto ab $a, b \in$* **R**. **Observação:** *é necessário usar semelhança de triangulos e o número 1 de uma das retas.*
4. *Desenhe uma* reta orientada . *A partir da origem trace um segmento de reta $\overline{OP}$ que faça com a* reta orientada *um ângulo de $\frac{\pi}{4}$. Marque o ponto $P = (1, 1)$. Calcule a distância de P a origem. Com um compasso transfira esta distância para a parte positiva da* reta orientada *mantendo uma das pontas do compasso no ponto O. Qual o ponto da* reta orientada *que ficou assim determinado?*
5. *Trace uma parelala à* reta orientada *passando pelo ponto $(0, 1)$. Trace uma perpendicular à* reta orientada *passando pelo ponto 2 e determine assim o ponto P sobre a paralela traçada anteriormente. Trace o segmento de reta $\overline{OP}$ e calcule o seu comprimento, distância de P à origem. Com um compasso transfira este comprimento para a* reta orientada *e verifique qual é o número assim determinado nela.*
6. *Faça um esboço da demonstração das propriedades de cada um dos objetos:* $(\mathbf{R}, +)$; $(\mathbf{R}, \cdot)$; $(\mathbf{R}, +, \cdot)$; $(\mathbf{R}, +, \cdot, \leq)$
7. *Tente demonstrar algumas das propriedades listadas acima, geometricamente.*
8. *equações sobre* **R**.
   (a) *Resolva as equações abaixo em* $(\mathbf{R}, +, \cdot)$.
   $$\sqrt{2}x + \sqrt{5} = 1 \qquad \frac{3}{\sqrt{2}}x - \frac{\sqrt{5}}{2} = -1$$
   (b) *Encontre* valores aproximados *para as soluções das equações anteriores e expresse uma estimativa do erro.*
9. *Marque na* reta orientada *os seguintes sub-conjuntos:*
   $$\{x \ ; \ |x| < 3\} \ ; \ \{x \ ; \ |x| < 1\} \ ; \ \{x \ ; \ |x| \leq 3\}$$
10. *Resolva as desigualdades:*
   $$3x - 4 \leq 7 \qquad \frac{4}{3}x - \frac{3}{2} \geq \frac{2}{5}$$
   Represente geometricamente, na reta orientada , *as soluções das desigualdades anteriores.*

2.4 Sucessões de números racionais

Nesta seção vamos iniciar o estudo das sucessões de forma bem elementar mas com o objetivo familiarizá-lo com o conceito na direção que desejamos dar neste texto: *um número real pode ser visto como uma sucessão.* Nesta forma de ver vai se repetir um *problema* que já encontramos com os racionais, *a diversidade de representação.* Há várias sucessões que representam o mesmo número. A solução para este "problema"é uma classificação como se faz as frações.
Primeiro vamos expor as idéias, depois virão as técnicas, o limite é uma delas.

As sucessões são um *tipo de dados* (leia uma classe de objetos) em Matemática, que tem diversas utilizações, citemos algumas:

- Indexar um conjunto, num conjunto de sucessões. Por exemplo quando você enumera os objetos de um conjunto, usando a sucessão dos números naturais ou uma subsucessão finita de números naturais.
- Criar um modelo discreto para um fenômeno, quando você coloca um sensor que *de tempos em tempos* mede o tal fenômeno.
- Modelar um número real, por exemplo quando você diz que os números
  $$1, 1.4, 1.414, 1.4142, 1.41421, 1.414213, 1.4142135$$
  são uma sucessão "finita" de aproximações por *falta* de $\sqrt{2}$. Veja a listagem abaixo dos quadrados dos elementos do conjunto anterior.

```
power(1.4,2)  1.96   < 2
power(1.41,2) 1.9881   < 2
power(1.414,2)  1.999396  < 2
power(1.4142,2)  1.99996164  < 2
power(1.41421,2)  1.9999899241  < 2
power(1.414213,2)  1.999998409369  < 2
power(1.4142135,2)  1.99999982358225  < 2
```

Nós, aqui, **diremos** que

$$s = (1,\ 1.4,\ 1.414,\ 1.4142,\ 1.41421,\ 1.414213,\ 1.4142135,\ \cdots)$$

é o número real $\sqrt{2}$, mas observe as reticências que tornam a segunda expressão uma sucessão não finita.

Exemplo: 10 *Duas sucessões que representam* $\sqrt{2}$

Abaixo você os quadrados dos elementos da sucessão t

$$t = (1.5, 1.42, 1.415, 1.4143, 1.41422, 1.414214, 1.4142136 \cdots)$$

```
power(1.5,2)  2.25   > 2
power(1.42,2)  2.0164 > 2
power(1.415,2)  2.002225 < 2
power(1.4143,2)  2.00024449  < 2
power(1.41422,2)  2.0000182084  < 2
power(1.414214,2)  2.000001237796  < 2
power(1.4142136,2)  2.00000010642496 < 2
```

A sucessão t também representa $\sqrt{2}$ *e algumas vezes dizemos que seus termos são uma aproximação por excesso de* $\sqrt{2}$.

Esta maneira de falar, apesar de correta, induz em preconceitos. Vamos repetir a frase acima:

t é o número real $\sqrt{2}$.

Voce vé assim que o número $\sqrt{2}$*, como qualquer outro número real, tem diversas representações.*

Fizemos anteriormente um esboço da construção geométrica dos números reais **R**. Ela é um modelo de construção incompatível com o uso mais importante que podemos fazer dos números reais, por exemplo, é difícil, talvez impossível, usarmos a construção geométrica dos reais num programa de computação. Mesmo assim tem gente que gosta usar esta construção, por exemplo os que falam em *aritmética intervalar* usam esta idéia e convivem com esta dificuldade de forma esquisita...

Nós julgamos que um outro modelo é mais conveniente, porque é mais algébrico, as sucessões. Como nas construções que fizemos anteriormente, está será resumida e você deve procurar subsídios na literatura para completar os seus conhecimentos se não os quiser construir com suas próprias mãos.

Um ditado de computação afirma, *quando se descobre a estrutura de dados adequada, o problema fica resolvido.* Temos que encontrar uma estrutura adequada para os números. Aqui vamos fazer uma construção intuitiva baseada na semelhança que os números reais tem com a reta como os gregos entendiam "reta". Mais a frente usaremos sequências para representá-los, quer dizer, um número é uma sequência convergente. Em geral ficamos apenas com alguns termos destas sucessões, quer dizer, fazemos aproximações.

Claro, estamos convencidos de que o modelo "sucessões" é perfeito para os números reais.

Com o objetivo de reforçar a importância do uso das sucessões, dentro do espirito de *discretização* de um fenômeno, vamos calcular algumas integrais para as quais o método geométrico desenvolvido no primeiro capítulo é ineficiente. Usaremos sucessões para discretizá-las, como se estivemos usando um sensor para analisar seus valores. É o mesmo método que usariamos para calcular $\sqrt{2}$ experimentando com os algarismos.

Observação: 8 *Aparentemente existem poucos números reais*

Não podemos dar um sentido fácil a expressão "quantidade de números"para falar de todos que existem... a palavra quantidade, *usada na linguagem comum, está associada à contagem. Nós não podemos contar os números.*

Este texto, como tantos outros, corre o risco de sugerir que existem uns poucos números reais esquisitos,

$$\pi, \sqrt{2}, \sqrt{3}...$$

Esquisitos porque não podemos lidar com eles "exatamente", sempre temos que falar deles usando a palavra "aproximação". É só somar ou subtrair e multiplicar que você vai ver que eles existem em grandes "quantidade":

$$3+\pi, 2+\pi, \sqrt{2}+\pi, \sqrt{\pi}, \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdots$$

Mas basta mostrar como podemos representar $\sqrt{2}$ *para ilustrar a idéia.*

2.5 Sucessões - exemplos e definições.

Vamos fazer contas com sucessões, para nos habituarmos com a idéia de que elas representam números.

Definição: 6 *Sucessão. Sucessão é uma função definida no conjunto* **N**. `progressão geométrica`.

Por exemplo, uma `progressão aritmética`, uma `progressão geométrica`.

Exercícios: 15 *Sucessão e número real*

1. *Construa dois exemplos de* `sucessão finita` *com 5 termos.*
2. *Decida qual dos exemplos de sucessão abaixo é positiva e descrescente*
   - $a_1 = (1, 1, 1, 1, \ldots)$
   - $a_2 = (1\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots)$
   - $a_3 = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots)$
   - $a_4 = (1, 1, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 7, 8, 9, 9, 10, 11, 11, \ldots)$
   - $a_5 = (10, 8, 6, 4, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots)$
3. *Para as sucessões definidas acima vamos estabelecer a notação*

   $$a_{i,k}$$

   para designar o termo de ordem k da sucessão a_i. Escreva
   - $a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}$
   - $a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}$
   - $a_{5,1}, a_{5,2}, a_{5,3}, a_{5,4}, a_{5,6}$
4. *Decida qual dos exemplos de sucessão acima é positiva e crescente.*
5. *Construa novo exemplo de sucessão positiva que decresça para zero (diferente do que se encontra acima).*

6. *Tente descobrir, para cada uma das sucessões*

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$$

a lei de formação dos seus termos (o termo geral) $a_{i,k}$

7. *Considere a sucessão* a_2 *definida acima. Calcule o seu quadrado, e chame esta nova sucessão de* a_6 *Decida se é verdade que "*a_6 `decresce indefinidamente para zero`*".*

8. *Calcule o produto* $a_2 * a_3$*. Seria verdade que estas sucessões são inversos multiplicativos uma da outra?*

9. *As sucessões seguintes se classificam em duas classes, procure identificar a que classe elas pertencem*

   - $-3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, \ldots$
   - $4.0, 3.5, 3.33, 3.25, 3.2, 3.166, 3.142, 3.125, 3.(1), \ldots$
   - $3.2, 3.166, 3.142, 3.125, 3.(1), 3.1, 3.090, 3.083, 3.076, \ldots$
   - $3.125, 3.(1), 3.1, 3.(09), 3.0833, 3.076, 3.071, 3.066, 3.062, \ldots$
   - $-2.875, -2.(8), -2.9, -2.(909), -2.916, -2.9230, -2.928, -2.933, -2.937, \ldots$
   - $-2.(6), -2.75, -2.8, -2.8(3), -2.857, -2.875, -2.(8), -2.9, -2.(909), \ldots$
   - $-2.0, -2.5, -2.(6), -2.75, -2.8, -2.8(3), -2.(85714), -2.(875), -2.(8), \ldots$
   - $3.5, 3.(3), 3.25, 3.2, 3.1(6), 3.(142857), 3.125, 3.(1), 3.1, \ldots$

10. *As sucessões abaixo pertencem todas a uma mesma classe, tente indenfiticar qual é a classe*

    - $0.5, 0.(3), 0.25, 0.2, 0.1(6), 0.(142857), 0.125, 0.(1), 0.1, \ldots$
    - $1.0, 0.5, 0.(3), 0.25, 0.2, 0.1(6), 0.(142857), 0.125, 0.(1), \ldots$
    - $1.0, 0.25, 0.(1), 0.0625, 0.04, 0.02(7), 0.0204081..., 0.01562..., 0.0(123456790), \ldots$
    - $0.(09), 0.08(3), 0.(0769230), 0.07(142857), 0.0(6), 0.0625, 0.058823, 0.0(5), 0.05263, \ldots$
    - $0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots$

11. *Encontre o inverso aditivo das sucessões* a_1, a_2, a_3, a_4, a_5

12. *Decida se é verdade que* a_5 *decresce indefinidamente para zero.*

13. *Calcule o produto das sucessões*

    - $0.5, 0.3, 0.25, 0.12, 0.16, 0.14, 0.12, 0.11, 0.105, \ldots$
    - $2.0, 1.5, 1.33, 1.25, 1.21, 1.16, 1.14, 1.12, 1.111, \ldots$

14. *Dê tres exemplos de sucessões.*

15. *Encontre uma* sucessão finita *que seja uma aproximação por excesso de* $\sqrt{2}$.

16. *Construa dois exemplos de sucessões numéricas tiradas da "*vida real*".*

17. *Número racional*

    (a) *Escreva a definição de número racional.*
    (b) *Como são as sucessões que definem números racionais ?*
    (c) *Decida qual das afirmações é verdadeira:*
        i. *Um número racional é uma dízima periódica*
        ii. *As dízimas não periódicas podem ter geratrizes*
        iii. *As dízimas não periódicas representam números irracionais*

18. *Escreva uma dízima periódica equivalente a cada um dos números racionais abaixo:*

$$\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\frac{2}{3}\ ;\ \frac{3}{7}\ ;\ \frac{9}{10}\ ;1$$

Pode haver mais de uma dízima associada com um número racional? Mostre exemplos.

19. *De exemplo de uma* dízima não periódica.

20. *Encontre a geratriz da dízima, 0.3333... primeiro observando que ela é a soma dos termos de uma progressão geométrica.*

21. *Mostre que* $23.34565656565656\cdots$ *é a soma dos termos de uma progressão geométrica e encontre a geratriz desta dízima.*

22. *Escreva as dízimas que apareceram nos exercícios anteriores como sucessões.*

23. *Notação Vamos usar a seguinte notação : Dada uma sucessão s vamos designar por* s_n *o seu termo geral. Por exemplo, a sucessão* $d = (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, ...$; *tem, por termo geral:*

$$s_n = \frac{n}{n+1}\ ;\ n \in \{0, 1, 2, 3, \cdots\} = \mathbf{N}$$

Descubra o termo geral das sucessões:

(a) $c = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, ...$;
(b) $d = (\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, ...$;
(c) $f = (\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, ...$;
(d) $h = (\frac{2}{2}, \frac{4}{3}, \frac{6}{4}, \frac{8}{5}, \frac{10}{6}, ...$;

Descubra qual é o termo geral das somas e dos produtos feitos anteriomente.

24. *Cada uma das sucessões abaixo "representa" um número real (pode ser racional), da mesma forma como acima temos exemplos de sucessões que representam* $\sqrt{2}$. *Descubra, usando intuitivamente o conceito de "aproximação", quais são os números que elas representam.*

   (a) $c = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, ...$;
   (b) $d = (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, ...$;
   (c) $f = (\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, ...$;
   (d) $h = (\frac{2}{2}, \frac{4}{3}, \frac{6}{4}, \frac{8}{5}, \frac{10}{6}, ...$;

25. *operações com sucessões; Soma de sucessões.* *Some, duas a duas, as sucessões abaixo:*

   (a) $c = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, ...$;
   (b) $d = (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, ...$;
   (c) $f = (\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, ...$;
   (d) $h = (\frac{2}{2}, \frac{4}{3}, \frac{6}{4}, \frac{8}{5}, \frac{10}{6}, ...$;

26. *operações com sucessões; Produto de sucessões.* *Faça o produto, duas a duas, das sucessões abaixo:*

   (a) $c = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, ...$
   (b) $d = (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, ...$
   (c) $f = (\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, ...$
   (d) $h = (\frac{2}{2}, \frac{4}{3}, \frac{6}{4}, \frac{8}{5}, \frac{10}{6}, ...$

   (a) *Cada uma das sucessões do exercício (ex. 24), se s representar o número S e t representar o número T então $s+t$ reprsenta o número $S+T$. Traduza esta frase usando o operador "limite".*

   (b) *Cada uma das sucessões do exercício (ex. 24), se s representa o número S e t representa o número T então st reprsenta o número ST. Traduza esta frase usando o operador "limite".*

27. *Inscreva num círculo um quadrado. Depois um pentágono, depois um hexágono. Calcule o perímetro de cada uma das figuras inscritas e chame este números de P_4, P_5, P_6. Qual seria o valor de P_7, P_8, P_9?*

28. *Para cada um dos elementos da sucessão (P_n) definida no exercício anterior, calcule $p_n = \frac{P_n}{2*raio}$. Escreva o valor dos termos da sucessão p.*

29. *Defina a sucessão $A = (A_n)$; A_n = área de um políno regular convexo inscrito num círculo de raio r. Escreva os valores de A para $n \leq 10$.*

30. *Escreva os 10 primeiros termos da sucessão $\frac{1}{n!}$. Calcule também as somas sucessivas destes termos:*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} s_k \ ; \ s_k = (\frac{1}{3})^k$$

   Solução: rode o programa `limite01.calc`
   calc < limite02.calc

31. *Analisando o resultado do programa* `limite01.calc` *justifique a afirmação seguinte:* "não vale rodar o programa para $n > 21$ porque já se terá chegado ao limite de precisão da máquina".

32. *Escreva os 10 primeiros termos da sucessão (progressão geométrica) das potências de $\frac{1}{3}$. Calcule também as somas sucessivas destes termos:*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} s_k \ ; \ s_k = (\frac{1}{3})^k$$

   Solução: rode o programa limite02.calc
   calc < limite02.calc

2.6 A integral no sentido de Riemann.

A definição que demos de integral no capítulo 1 diz que

$$\int_a^b f$$

é a área algébrica limitada pelo gráfico de f e o eixo OX, desde $x = a$ até $x = b$. Vamos explorar um pouco mais este assunto aqui.

O cálculo de uma integral $\int_a^b$ se faz facilmente se o gráfico de f for formado de segmentos de linha reta. Mas se o gráfico de f for formado por segmentos de curvas nem sempre nós vamos saber calcular esta área com exatidão. Mais adiante você verá que alguns casos isto é possível, entretanto é o cálculo aproximado que sempre prevalece, é este o conteúdo desta seção: vamos mostrar que a integral é um instrumento para construir sucessões, logo números reais.

Quer dizer que, aqui, o nosso interesse pelas integrais se resume a vê-las como um método de construção de sucessões.

O instrumento universal para calcular integrais é a *soma de Riemann* que vamos estudar aqui. Você verá mais a frente que em alguns casos se podem deduzir, das *somas de Riemann*, fórmulas para o cálculo formal da integral.

As somas de Riemann aproximam áreas de regiões cujas fronteiras não são retilineas, com áreas de retângulos.

Olhe as figuras (fig. 3.1), na página 101, (fig. 3.2), na página 106 para concretizar ante seus olhos como se podem aproximar área com retângulos.

Vamos construir, aqui, sucessões a partir das somas de Riemann.

Exercícios: 16 *Discretizando as integrais*

1. <u>Soma de Riemann</u> *Trace o gráfico da parábola $y = f(x)$ e represente graficamente as integrais indicadas:*

a) $f(x) = x^2$; $\int_{-1}^{1} f$	b) $f(x) = -x^2$; $\int_{-2}^{1} f$
c) $f(x) = (x-1)(x+2)$; $\int_{-2}^{1} f$	d) $f(x) = (1-x)(x+2)$; $\int_{-2}^{2} f$

2. <u>Cáculo da integral por aproximação</u>

   (a) <u>aproximação por falta</u> *Para cada uma das integrais do exercício 1, divida o domínio de integração em 4 subintervalos iguais. Calcule aproximadamente $\int_a^b f$, por falta, usando retângulos, tendo cada um dos sub-intervalos por base. Ver a figura (fig. 3.1), na página 101).*

   (b) <u>aproximação por excesso</u> *Para cada uma das integrais do exercício 1, divida o domínio de integração em 4 subintervalos iguais. Calcule aproximadamente $\int_a^b f$, por excesso, usando retângulos, tendo cada um dos sub-intervalos por base.*

   (c) *Para cada uma das integrais do exercício 1, divida o domínio de integração em 10 subintervalos iguais e calcule uma aproximação para $\int_a^b f$, por excesso, usando retângulos, tendo cada um dos sub-intervalos por base.*

   (d) *Para cada uma das integrais do exercício 1, divida o domínio de integração em 10 subintervalos iguais e calcule uma aproximação para $\int_a^b f$, por falta, usando retângulos, tendo cada um dos sub-intervalos por base.*

3. <u>Soma de Riemann - gerando sucessões</u> *Generalize o que foi feito na suite de exercicios 2, escrevendo uma soma genérica para calcular aproximadamente*

$$\int_a^b f$$

usando o fato de que o intervalo $[a, b]$ foi dividido em n subintervalos iguais. Coloque a expressão sob a forma de um somatório. Sugestão, veja o próximo exercício.

4. <u>somas de Riemann como geradoras de sucessões.</u>

   (a) *Mostre (construindo uma sucessão) que as* `somas de Riemann` *são um* `processo gerador` *de sucessões: Escolha uma função f, um intervalo $[a, b]$, construa alguns termos de uma sucessão*

$$s = (s_1, s_2, s_3, \cdots, s_n) \ ; \ s_n = \sum_{1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

   usando somas de Riemann (se inspire nos exercícios anteriores).

   (b) *Justifique por que: "pelo menos uma sucessão", podia haver outras ?*

   (c) *Construa os 10 primeiros termos de duas sucessões diferentes associadas a cada uma das integrais do exercício 1.*

   Estas somas de Riemann se dizem de ordem 10, *porque são somas de 10 retângulos.*

   (d) *Considere a integral $\int_0^a x^2$ escreva a expressão da soma de Riemann de ordem n para esta integral e a calcule exatamente o valor da referida soma de Riemann.*

5. <u>Cálculo aproximado de π</u>

   (a) *Verifique que área de um* polínogo regular de n lados, inscrito no círculo unitário, *é uma aproximação de π.*

   (b) *Construa uma sucessão $s = (s_1, s_2, \ldots\ldots)$ que represente π usando polígonos regulares inscritos no círculo unitário.*

   (c) *Verifique que área de um* polínogo regular de n lados, circunscrito ao círculo unitário, *é uma aproximação de π, por excesso.*

   (d) *Construa uma sucessão $t = (t_1, t_2, \ldots\ldots)$ que represente π usando polígonos regulares circunscritos ao círculo unitário.*

6. <u>Regiões sem área</u>

   (a) *Represente geométricamente a integral $\int_{-\infty}^{\infty} x^2$.*

   (b) *Justifique porque a integral acima não representa área de uma figura. (Use o símbolo "∞"em sua explicação e decida se isto pode ser um número.)*

   (c) *Tente escrever uma soma de Riemann para integral acima, descreva as dificuldades encontradas e tente justificar porque a integral não existe.*

2.7 Limite

Nesta seção vamos falar de *limite* que uma das formas de estabelecer qual é o *comportamento assintótico* de uma sucessão. *Limite* é um operador, se você preferir, uma operação que aplicada em uma sucessão numérica "responde" com uma das seguintes alternativas:

- A sucessão define um número real;
- A sucessão não define nenhum número real.

Entretanto, é você que tem que saber calcular o valor do *limite* aplicado à sucessão. Infelizmente ainda não temos máquinas com esta operação automatizada. Mas não se assuste, há muitos limites que sabemos calcular e felizmente outros que ainda continuam nos desafiando, também.

2.7.1 Limite e comportamento assintótico

Observação: 9 *comportamento assintótico*

Comportamento assintótico é uma das idéias básicas da Matemática. Ela não pode ser expressa a partir de outras, isto significa que ela é clara por si própria.

Os números são representados por sucessões. Quando descobrirmos qual é o número que uma sucessão representa, descobrimos o seu comportamento assintótico.

Um exemplo básico é $(\frac{1}{n})_{n>0}$ *que representa o zero. Temos algumas maneiras equivalentes de fazermos referência a esta idéia:*

- $(s_n)_n = (\frac{1}{n})_n$ *representa o zero;*
- $\lim\limits_n s_n = \lim\limits_n \frac{1}{n} = 0$
- $\frac{1}{n}$ *converge para zero. É* *uma* *sucessão nula.*
- $\frac{1}{n}$ *é assintótica a zero.*

Estas frases descrevem o "comportamento assintótico" de $(s_n)_n = (\frac{1}{n})_n$

Veja que as coisas não são tão simples[2]*, compare com a sucessão:*

$$(n)_{n\leq 0} = 0, 1, 2, 3, 4, \cdots n, \cdots$$

de todos números naturais.

A sucessão de todos os números naturais tem uma ligação com anterior:

$$s = (s_n)_{n>0}) = (\tfrac{1}{n})_{n>0} \quad (2.11)$$

$$t = (t_n)_{n>0}; t_n = n \quad (2.12)$$

$$s = \tfrac{1}{t} \quad (2.13)$$

Claro, s representa um número, o zero, enquanto que t não representa número nenhum, do contrário o zero teria inverso.

A sucessão t tem um comportamento assintótico que é difícil de descrever neste momento, mas o certo é que não define nenhum número. Podemos dizer que ela é crescente, ilimitada, *não tem* limite *(consequentemente ela não define nenhum número), ela é divergente.*

Diremos que $\frac{1}{n}$ *é* `convergente`*, diremos também que a sucessão dos números naturais é* `divergente`.

Vamos construir alguns exemplos ilustrando o conceito, os exercícios devem terminar por torná-la (torná-lo) íntimo da idéia.

Para terminar esta introdução, o comportameno assintótico é uma classificação, uma etiqueta. *Classificamos com um* determinado comportamento assintótico *funções, sucessões etc... Considere, por exemplo, as duas sucessões:*

- $s = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots)$

[2]Esta frase será repetida muitas vezes, você não deve se assustar com ela, seu objetivo é de dizer que Matemática exige cuidado e reflexão para atingirmos a profundidade dos seus conceitos.

- $t = (-1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{5}, \ldots)$

Ambas definem o número zero, estão portanto numa mesma classe, *são* equivalentes, têm o mesmo comportamento assintótico.

Um outro exemplo, tanto $\frac{4}{3}$ *como* π *tem um "número infinito"*[3] *de casas decimais. Entretanto, você pode afirmar sempre qual é a próxima casa decimal de* $\frac{4}{3}$ *ao passo que a próxima casa decimal de* π*, fora as conhecidas, é imprevisível.*

Ambas definem números, neste caso números diferentes, portanto não estão numa mesma classe, *não são* equivalentes, não têm o mesmo comportamento assintótico.

As casas decimais de $\frac{4}{3}$ *tem um comportamento assintótico previsível ao passo que as casa decimais de* π *não formam uma sucessão com comportamento assintótico imprevisível, pelo menos no estágio de conhecimento que em que estamos.*

$\frac{4}{3}$ *é um número racional e sua representação decimal é uma dízima periódica.*

π *é um número irracional, sua representação decimal é uma dízima não periódica. Quer dizer, a próxima casa decimal de* π *pode ser qualquer um dos 10 algarismos. Observe que estamos nos referindo às casas decimais de* π.

Os exercícios devem conduzí-lo a dominar o assunto.

Exercícios: 17 *Comportamento assintótico*

1.
2.
3.

2.7.2 Sucessões que convergem para zero

É verdade que "comportamento assintótico" é um conceito difícil que terá de ser absorvido por você ao longo de uma prática minuciosa. Entretanto nós podemos tornar "técnica" a definição de convergência para zero:

Definição: 7 *Sucessões com limite zero*

Diremos que uma sucessão s tem limite zero se e somente se

$$\forall\epsilon > 0 \ ; \exists n_0 \in \mathbf{N} \ ; \ n > n_0 \quad \Rightarrow \quad |s_n| < \epsilon$$

Na figura (fig. 2.1) página 68, você pode ver um instrumento usado por mecânicos, o paquímetro que ajuda a compreender a ideia de limite. Os termos de uma sucessão podem oscilar, mas a partir de um certo índice, m_0 a oscilação fica limitada pela abertura ϵ do paquímetro.

Os termos da sucessão se encontram numa vizinhança de raio ϵ da reta que marca a altura em que se encontra o número real s que a sucessão representa.

Se você considerar a reta que marca a altura zero, e colocando o paquímetro aberto com abertura ϵ a volta desta reta, a partir do índice n_0 todos os pontos da sucessão vao passar por esta abertura o que se traduz algebricamente com

$$|s_n - s| < \epsilon$$

e temos assim a definição de $\lim\limits_n s_n = a$.

Definição: 8 *Sucessões com limite* *a*

Diremos que uma sucessão s tem limite *a* *se e somente se*

$$\forall\epsilon > 0 \ ; \exists n_0 \in \mathbf{N} \ ; \ n > n_0 \quad \Rightarrow \quad |s_n - a| < \epsilon$$

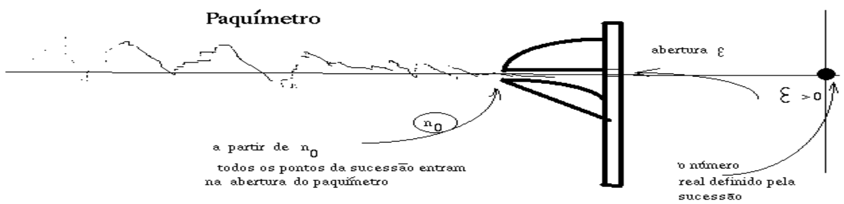

Figura 2.1: Como num paquímetro, a definição de limite determina a oscilação aceitável de uma sucessão.

Em alguns exercícios você pode gerar uma resposta automática usando a "máquina de calcular `calc` em LinuX". Os arquivos necessários podem ser obtidos com o autor.

Exercícios: 18 *Comportamento assintótico*

1. *As sucessões abaixo todas tem limite, descubra o valor do limite e escreva a definição de limite adaptada ao valor encontrado:*

a) $\frac{2n+1}{n+1}$	b) $\frac{n+1}{2n+1}$	c) $\frac{2n+1}{3n+1}$	d) $\frac{3n-7}{2n+5}$
$\frac{2n^2}{(n+1)^2}$			

2. *Dê exemplos de algumas funções para cujas integrais as* `somas de Riemann` *não tenham um* `processo assintótico` *definido, por exemplo elas caracterizan uma região* **sem área**. *Escreva detalhadamente os exemplos.*

3. *Para as equações $y = f(x)$ abaixo, e no domínio indicado, verifique se $\int_I f$ define sucessões com* comportamento assintótico *previsível ou não, (experimente), I é domínio de integração.*

[3]Maneira de falar inaceitável, "número infinito"... não existem números infinitos.

$f(x)$	I	$f(x)$	I	$f(x)$	I
x^2	$[0,10]$	x	$[0,10]$	$1/x^2$	$(0,10]$
x^2	$(0,10)$	$1/x$	$(0,1)$	$1/x^2$	$[1,\infty)$
x^2	$[0,\infty)$	$1/x$	$[1,\infty)$	$1/x^2$	$(0,1]$

4. *Classifique as funções relativamente às suas somas de Riemann, em duas classes, analisando quando um* `processo assintótico` *previsível se encontra definido a partir das somas de Riemann. Indique a que classe pertence cada uma das funções definidas nos exercícios anteriores.* Observe que o domínio de integração é peça essencial nesta classificação.

5. *De acordo com a sua definição, quais das funções do exercício 3 é integrável no domínio indicado.*

Exercícios: 19 *Sucessões e convergentes ou divergentes*

1. *Abaixo você tem o* termo geral *de algumas sucessões. Classifique-as segundo as seguintes "conceitos" que traduzem um tipo de comportamento assintótico:*

crescente	decrescente	oscilante	limitada	ilimitada

Observe que mais de um conceito se pode aplicar a uma mesma sucessão, como "oscilante-ilimitada".

$\frac{n^2+1}{n+3}$	$\frac{1}{n!}$	$\frac{n^2}{n!}$	$\frac{(-1)^n}{n+1}$
$\frac{sen(n\pi)}{n+1}$	$\frac{cos(n\pi)}{n+1}$	$\frac{n}{cos(n\pi)}$	$\frac{n}{(n+1)cos(n\pi)}$
$\frac{n!}{n^5}$	$\frac{n!}{n^{10}}$	$sen(\frac{(2n+1)\pi}{2n})$	$sen(\frac{(2n+1)\pi}{2})$

2. *sucessão decrescente*
   (a) *Verifique que as duas sucessões $s_n = \frac{1}{2^n}$ e $t_n = \frac{1}{n!}$ são decrescentes. Prove que a afirmação é verdadeira.*
   (b) *Verifique que se $s_n = \frac{1}{2^n}$ e $t_n = \frac{1}{n!}$ então existe um índice n_0 a partir do qual $s_n > t_n$. Prove que a afirmação é verdadeira.*
   Sugestão Rode calc < sucessao.calc
   (c) *Defina $S_n = \sum_{k=0}^{n} s_k$ e calcule os quatro primeiros termos desta sucessão.*
   Sugestão: Troque no arquivo `sucessao.calc` *s por S e t por T, onde está indicado, e rode* `calc < sucessao.calc`.
   (d) *Defina $T_n = \sum_{k=0}^{n} t_k$ e calcule os quatro primeiros termos desta sucessão.*
   Sugestão calc < sucessao.calc

(e) *Defina* $S_n = \sum_{k=0}^{n} s_k$ *e calcule os quatro primeiros termos desta sucessão.*

Sugestão calc < sucessao.calc

(f) *Verifique que existe um índice* n_0 *a partir do qual* $S_n < T_n$. *Prove que a afirmação é verdadeira.*

Sugestão: Rode na linha de comando do `LinuX` *"calc < sucessao.calc"em que* `sucessao.calc` *é um programa que está no arquivo* `programa.tgz`*, ver índice remissivo.*

3. *Prove as seguintes identidades:*

a) $\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{(n-1)n}{2}$	b) $\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$
c) $\sum_{k=0}^{n-1} k^3 = (\frac{n(n-1)}{2})^2$	d) $\sum_{k=0}^{n-1} k^4 = \frac{(6n^4-15n^3+10n^2-1)n}{30}$

4. *Cálculo de somas* *Em questão anterior foram demonstrados resultados, (quatro exemplos), associados a um tipo especial de* serie. *Vamos descobrir aqui um* teorema *associado a estes exemplos.*

(a) *Prove que se* P *for um polinômio do grau* n *então*

$$Q(x) = \Delta P(x) = P(x+1) - P(x)$$

é um polinômio do grau $n-1$.

(b) *Prove que existe um polinômio do grau* n *tal que*

$$x^{n-1} = \Delta P(x) = P(x+1) - P(x)$$

Mostre que se P *for um tal polinômio, então* $R(x) = P(x)+k$ *também é solução da identidade anterior.*

(c) *Baseado nos quatro exemplos referidos, quais das afirmações seguintes parecem verdadeiras:*

i. *Dado um polinômio de grau* Q *de grau* m, *existe um polinômio* P *de grau* $m-1$ *tal que* $Q = \Delta P$

ii. *Dado um polinômio de grau* Q *de grau* $m+1$, *existe um polinômio* P *de grau* $m-1$ *tal que* $Q = \Delta P$

iii. *Dado um polinômio de grau* Q *de grau* $m-1$, *existe um polinômio* P *de grau* m *tal que* $Q = \Delta P$

iv. *Seja* Q *for o polinômio* $Q(x) = x^{m-1}$, *existe um polinômio* P *de grau* m *tal que* $Q = \Delta P$

(d) *Expanda a soma abaixo usando expressão obtida anteriomente e verifique que*

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^p = P(n) - P(0)$$

(e) *Enuncie um teorema a respeito das somas de potências baseado nos quatro exemplos acima envolvendo grau de polinômios.*

(f) *Demonstre o teorema.*

5. *Escreva uma soma de Riemann para* $\int_0^a x^2$ *e verifique que*

$$\int_0^a x^2 \approx \frac{a^3}{6n^3}(n-1)(2n-1)n$$

6. *Verifique que*

$$\int_0^a x^2 \approx \frac{a^3}{6}(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}.$$

Conclua que, como $\frac{3}{n}, \frac{1}{n^2}$ *são representantes do zero, então*

$$\int_0^a x^2 = \frac{a^3}{3}$$

e, em particular,

$$\int_0^1 x^2 = \frac{1}{3}.$$

A última questão se encontra inteiramente resolvido mais a frente, procure no índice remissivo sob a chave "área".

1. sucessão decrescente

(a) Verifique que as duas sucessões $s_n = \frac{1}{2^n}$ e $t_n = \frac{1}{n!}$ são decrescentes. Prove que a afirmação é verdadeira.

Solução: 1 *Uma sucessão é decrescente se*

$$s_{n+1} < s_n$$

$$s_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^n} = s_n \quad (2.14)$$

$$t_n = \frac{1}{(n+1)!} < t_n = \frac{1}{n!} \quad (2.15)$$

provando que as duas sucessões são decrescentes.

(b) Verifique que se $s_n = \frac{1}{2^n}$ e $t_n = \frac{1}{n!}$ então existe um índice n_0 a partir do qual $s_n > t_n$. Prove que a afirmação é verdadeira.

Solução: 2 *Demonstração por* indução finita

O programa (escrito em calc)

```
define fat(n)
          {if (n==0) return 1;
          return n*fat(n-1);}
define invfat(n)
          return 1./fat(n)
define invpot(n)
          return 1./power(2,n);
define lista(n,k)
          {k=0;
          printf("%s %12s %12s",
          "k 1/2","k","1/k!");
          while (k ¡ n)
           {
           printf("%d %12.10f %12.10f ",
           k, invpot(k), invfat(k));
           k++
           }
          }
lista(10,0)
quit
```

produz o resultado, (convenientemente editado):

k	$\frac{1}{2^k}$	$\frac{1}{k!}$
0	1	1
1	.5	1
2	.25	.5
3	.125	.1666666666
4	.0625	.0416666666
5	.03125	.0083333333
6	.015625	.0013888888
7	.0078125	.0001984126
8	.00390625	.0000248015
9	.001953125	.0000027557

vemos que, aparentemente, a partir de $k = 4$ se tem

$$s_n > t_n$$

Consideremos esta afirmação uma hipótese. Seguindo o método da indução finita*, teremos que verificar o encadeamente lógico*

$$P(n) \Longrightarrow P(n+1)$$

em que supomos que $P(n)$ é verdadeira para $n > 4 = n_0$.

$$n > 4 \Longleftrightarrow n+1 > 4+1 = 5$$
$$P(n) : 2^n < (n)!$$
$$2 < 4 < 5 < n+1$$
$$2^{n+1} = 2 * 2^n < 5 * 2^n$$
$$5 * 2^n < (n+1)2^n$$
$$(n+1)2^n < (n+1)n! = (n+1)!$$
$$P(n+1) : 2^{n+1} < (n+1)!$$

Logo $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ porque usamos $P(n)$ numa sucessão de transformações algébricas, todas legais, chegando em $P(n+1)$, isto é, $P(n+1)$ é um consequente *lógico de $P(n)$. Então, pelo* teorema da indução finita*,*

$$\forall n > 3 \ ; \ (2^n < (n)!) \Longleftrightarrow s_n > t_n$$

(c) Defina $S_n = \sum_{k=0}^{n} s_k$ e calcule os quatro primeiros termos desta sucessão.

Solução: 3 *É a soma de uma das colunas de tabela feita acima.*

$$S_0 = \sum_{k=0}^{0} = 1$$
$$S_1 = \sum_{k=0}^{1} = 2$$
$$S_2 = \sum_{k=0}^{2} = 2.5$$
$$S_3 = \sum_{k=0}^{3} = 2.75$$
$$S_4 = \sum_{k=0}^{4} = 2.875$$

(d) Defina $T_n = \sum_{k=0}^{n} t_k$ e calcule os quatro primeiros termos desta sucessão.

Solução: 4 *É a soma de uma das colunas de tabela feita acima.*

$$T_0 = \sum_{k=0}^{0} = 1$$
$$T_1 = \sum_{k=0}^{1} = 2$$

$$T_2 = \sum_{k=0}^{2} = 2.5$$

$$T_3 = \sum_{k=0}^{3} = 2.6(6)$$

$$T_4 = \sum_{k=0}^{4} = 2.708(3)$$

(e) Defina $S_n = \sum_{k=0}^{n} s_k$ e calcule os quatro primeiros termos desta sucessão.
Sugestão calc < sucessao.calc

Solução: 5

k	S(k)	T(k)
0	1	1
1	1.5	2
2	1.75	2.5
3	1.875	2.6(6)
4	1.9375	2.708(3)
5	1.96875	2.71(6)
6	1.984375	2.7180(5)
7	1.9921875	2.7182539682
8	1.99609375	2.7182787698
9	1.998046875	2.7182815255
10	1.9990234375	2.7182818011

(f) Estimativa do número e Mostre que

i. Se
$$s_k = \frac{1}{2^k} \ ; \ S_n = \sum_{k=n_0}^{n} s_k \ ; \ T_n = \sum_{k=n_0}^{n} \frac{1}{k!}$$
Mostre que que existe n_0 $T_n =< S_n$

ii. Se
$$s_k = \frac{1}{3^k} \ ; \ S_n = \sum_{k=n_1}^{n} s_k \ ; \ T_n = \sum_{k=n_1}^{n} \frac{1}{k!}$$
Mostre que que existe n_1 $T_n =< S_n$

iii. Se
$$s_k = \frac{1}{4^k} \ ; \ S_n = \sum_{k=n_2}^{n} s_k \ ; \ T_n = \sum_{k=n_2}^{n} \frac{1}{k!}$$
Mostre que que existe n_2 $T_n =< S_n$

iv. Use uma soma adequada para encontrar uma estimativa para o número
$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Solução: 6 *A demonstração da existência dos números n_i é semelhante a que fizemos para as potências de 2, por indução, depois de descoberto quem é n_i. Apenas para ganhar tempo vamos encontrar estes números com um programa de computador:*

- *caso 2^k, foi feito acima, $n_2 = 4$*
- *caso 3^k, usando o mesmo programa*

k	$\frac{1}{3^k}$	$\frac{1}{k!}$
0	1	1
1	0.3333333333	1
2	0.1111111111	.5
3	0.0370370370	0.1666666666
4	0.0123456790	0.0416666666
5	0.0041152263	0.0083333333
6	0.0013717421	0.0013888888
7	0.0004572473	0.0001984126
8	0.0001524157	0.0000248015
9	0.0000508052	0.0000027557

$n_3 = 7$

- *caso 4^k, usando o mesmo programa*

k	$\frac{1}{4^k}$	$\frac{1}{k!}$
0	1	1
1	.25	1
2	0.0625	0.5
3	0.015625	0.1666666666
4	0.00390625	0.0416666666
5 .0009765625	0.0083333333	
6	0.0002441406	0.0013888888
7	0.0000610351	0.0001984126
8	0.0000152587	0.0000248015
9	0.0000038146	0.0000027557

$n_4 = 9$

- *caso 5^k, usando o mesmo programa*

k	$\frac{1}{5^k}$	$\frac{1}{k!}$
0	*1*	*1*
1	*0.2*	*1*
2	*0.04*	*0.5*
3	*0.008*	*0.1666666666666*
4	*0.0016*	*0.0416666666666*
5	*0.00032*	*0.0083333333333*
6	*0.000064*	*0.0013888888888*
7	*0.0000128*	*0.0001984126984*
8	*0.00000256*	*0.0000248015873*
9	*0.000000512*	*0.0000027557319*
10	*0.0000001024*	*0.000000275573*
11	*0.00000002048*	*0.000000025052*
12	*0.000000004096*	*0.000000002087*
13	*0.0000000008192*	*0.000000000160*
14	*0.00000000016384*	*0.000000000011*

$n_5 = 12$

- <u>*estimativa do número e*</u> *Não temos nenhuma técnica para calcular as somas parciais*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

mas temos um meio indireto para obter uma estimativa do seu valor.

Vimos que as distintas potências dos números naturais eram maiores que o fatorial até certo ponto e podemos usar isto para calcular uma aproximação para a série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$.

Veja a seguinte sucessão de cálculos que sugere como se pode fazer a estimativa:

$$\frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} \dots > \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} \dots \quad (2.16)$$
$$\frac{1}{3^7} + \frac{1}{3^8} \dots > \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} \dots \quad (2.17)$$
$$\frac{1}{4^9} + \frac{1}{4^{10}} \dots > \frac{1}{9!} + \frac{1}{10!} \dots \quad (2.18)$$
$$\frac{1}{5^{12}} + \frac{1}{5^{13}} \dots > \frac{1}{12!} + \frac{1}{13!} \dots \quad (2.19)$$
$$(2.20)$$

Estas observações permitem encontrar um majorante *bastante preciso para a série dos inversos dos fatoriais uma vez temos séries geométricas cujos limites são conhecidas para servir de majorante. Substituiremos a série dos inversos dos fatoriais pela série geométrica de razão* $\frac{1}{5}$ *a partir de* $k = 12$ *porque a partir desta ponto a série geométrica é maior do a série dos inversos dos fatoriais.*

$$e \approx \sum_{k=0}^{11} \frac{1}{k!} + \sum_{k=12}^{\infty} \frac{1}{5^k} \quad (2.21)$$

$$e \approx 2.71828182619849286515 + \frac{1}{5^{12}} \frac{1}{1-\frac{1}{5}} \quad (2.22)$$
$$e \approx 2.71828182619849286515 + 0.00000000512 \quad (2.23)$$
$$e \approx 2.71828183131849286515 \quad (2.24)$$

---

2. Prove as seguintes identidades:

a) $\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{(n-1)n}{2}$

b) $\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$

c) $\sum_{k=0}^{n-1} k^3 = (\frac{n(n-1)}{2})^2$

d) $\sum_{k=0}^{n-1} k^4 = \frac{(6n^4-15n^3+10n^2-1)n}{30}$

Solução: 7 *O método em todos os casos é o da* indução finita, *faremos a última.*

A afirmação que desejamos demonstrar é

$$P(n) \approx \sum_{k=0}^{n-1} k^4 = \frac{(6n^4-15n^3+10n^2-1)n}{30}$$

Aplicando a hipótese de indução finita

$$\sum_{k=0}^{n} k^4 = \frac{(6n^4+15n^3+10n^2-1)n}{30} = I$$

Se, ainda, valer a hipótese de indução finita *poderemos escrever* I *usando a expressão de* $P(n+1)$

$$J = \sum_{k=0}^{n} k^4 = \frac{(6(n+1)^4 - 15(n+1)^3 + 10(n+1)^2 - 1)(n+1)}{30}$$

Desejamos mostrar que $I = J$. *Desenvolvendo* J. *Vamos omitir o denominador comum, 30, nos cálculos, quer dizer que iremos encontrar* $30 * I$ *em vez de* I.

6	*(*	*1*	*4*	*6*	*4*	*1*	*0)*	
-15	*(*		*1*	*3*	*3*	*1*	*0)*	
6	*(*		*1*	*4*	*6*	*4*	*1)*	
10	*(*			*1*	*2*	*1*	*0)*	
-15	*(*			*1*	*3*	*3*	*1)*	
	(					*-1*	*0)*	
10	*(*				*1*	*2*	*1)*	
	(	*6*	*15*	*10*	*0*	*-1*	*0)*	$\approx 30 * I)$

$$30 * I = 6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n \tag{2.25}$$

$$I = \frac{(6n^4 + 15n^3 + 10n^2 - 1)n}{30} \tag{2.26}$$

---

3. <u>Cálculo de somas</u> Em questão anterior foram demonstrados resultados, (quatro exemplos), associados a um tipo especial de *serie*. Vamos descobrir aqui um *teorema* associado a estes exemplos.

   (a) Prove que se P for um polinômio do grau n então

   $$Q(x) = \Delta P(x) = P(x+1) - P(x)$$

   é um polinômio do grau $n-1$.

   (b) Prove que existe um polinômio do grau n tal que

   $$x^{n-1} = \Delta P(x) = P(x+1) - P(x)$$

   Mostre que se P for um tal polinômio, então $R(x) = P(x)+k$ também é solução da identidade anterior.

   (c) Baseado nos quatro exemplos referidos, quais das afirmações seguintes parecem verdadeiras:

      i. Dado um polinômio de grau Q de grau m, existe um polinômio P de grau $m-1$ tal que $Q = \Delta P$

      ii. Dado um polinômio de grau Q de grau $m+1$, existe um polinômio P de grau $m-1$ tal que $Q = \Delta P$

      iii. Dado um polinômio de grau Q de grau $m-1$, existe um polinômio P de grau m tal que $Q = \Delta P$

      iv. Seja Q for o polinômio $Q(x) = x^{m-1}$, existe um polinômio P de grau m tal que $Q = \Delta P$

   (d) Expanda a soma abaixo usando expressão obtida anteriomente e verifique que

   $$\sum_{k=0}^{n-1} k^p = P(n) - P(0)$$

   (e) Enuncie um teorema a respeito das somas de potências baseado nos quatro exemplos acima envolvendo grau de polinômios.

   (f) Demonstre o teorema.

Solução: 8 *(a) Um polinômio de grau n é uma expressão da forma*

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

Da álgebra de polinômios, sabemos que a soma de dois polinômios é um polinômio cujo grau é no máximo o maior dos graus dos polinômios envolvidos, portanto $\Delta P(x) = P(x+1) - P(x)$ é um polinômio de grau no máximo $n = grau(P)$, veremos logo que $grau(\Delta P(x)$ $n-1$.

Do exposto vemos que os coeficientes de menor grau serão de pequeno interesse, (ou nulo), para demonstrar o que precisamos e podemos assim considerar

$$P(x) = a_n x^n$$

tomando como nulos todos os coeficientes de grau inferior a n. Calculando

$$\Delta P(x) = P(x+1) - P(x) = a_n(x+1)^n - a_n x^n$$

$$\Delta P(x) = a_n \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} - a_n x^n$$

$$\Delta P(x) = a_n(C_n^0 x^n + \sum_{k=1}^{n} C_n^k x^{n-k}) - a_n x^n$$

$$\Delta P(x) = a_n(x^n + \sum_{k=1}^{n} C_n^k x^{n-k}) - a_n x^n$$

$$\Delta P(x) = a_n x^n + a_n x^n (\sum_{k=1}^{n} C_n^k x^{n-k}) - a_n x^n$$

$$\Delta P(x) = a_n x^n (\sum_{k=1}^{n} C_n^k x^{n-k})$$

e portanto $\Delta P(x)$ é um polinômio de grau $n-1$ como queriamos.

Se tivessemos considerado os demais termos na forma original de P, no máximo teriamos uma expressão algébrica mais complicada para um polinômio de grau menor ou igual a $n-1$.

(b) Dado um número inteiro n, queremos provar que existe um polinômio P tal que $\Delta P(x) = x^{n-1}$. Do item anterior sabemos que $grau(P) = n$

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

Conquanto não seja fácil escrever-se uma "fórmula" para resolver esta questão, podemos rapidamente chegar num algoritmo prático baseado no triângulo de Pascal. *Observe que a diferença torna o termo* a_0 qualquer*, porque ele vai ser cancelado, podemos considerar*

$$a_0 = 0$$

$$P(x+1) = a_n(x+1)^n + \cdots + a_1(x+1)$$

tem como "matriz" todos as linhas do triângulo de Pascal *desde a linha de ordem n até a linha de ordem 1, cada uma delas multiplicada* *pelo coeficiente do grau correspondente a ordem. Veja o exemplo no caso da terminação de P para calcular as* quinta potĉncias. *P vai ser um polinômio do grau 6, veja que, ao efetuarmos a diferença $\Delta P = P(x+1) - P(x)$, todos os coeficientes de P serão subtraidos da expansão de $P(x+1)$ o que signfica que os números líderes de cada linha do* triângulo de Pascal, *C_k^k, serão cancelados:*

a_6	*(6*	*15*	*20*	*15*	*6*	*1)*
a_5		*(5*	*10*	*10*	*5*	*1)*
a_4			*(4*	*6*	*4*	*1)*
a_3				*(3*	*3*	*1)*
a_2					*(2*	*1)*
a_1						*(1)*
	(1	*0*	*0*	*0*	*0*	*0)*

Com base neste "esquema" facilmente podemos resolver o sistema de equações, calculando, sucessivamente, a partir do valor de a_6:

$$6a_6 = 1 \Longrightarrow a_6 = \tfrac{1}{6}$$
$$15a_6 + 5a_5 = 0 \Longrightarrow 5a_5 = -\tfrac{5}{2} \Longrightarrow a_5 = -\tfrac{1}{2}$$
$$20a_6 + 10a_5 + 4a_4 = 0$$
$$\tfrac{20}{6} - \tfrac{10}{2} + 4a_4 = 0$$
$$4a_4 = -\tfrac{20}{6} + \tfrac{10}{2} \Longrightarrow a_4 = \tfrac{5}{12}$$
$$15a_6 + 10a_5 + 6a_4 + 3a_3 = 0$$
$$\tfrac{15}{6} - \tfrac{10}{2} + \tfrac{30}{12} + 3a_3 = 0$$
$$\tfrac{5}{2} - 5 + \tfrac{5}{2} + 3a_3 = 0 \Longrightarrow a_3 = 0$$
$$6a_6 + 5a_5 + 4a_4 + 3a_3 + 2a_2 = 0$$
$$1 - \tfrac{5}{2} + \tfrac{5}{3} + 2a_2 = 0 \Longrightarrow a_2 = -\tfrac{1}{12}$$
$$a_1 = -(-\tfrac{1}{12} + \tfrac{5}{12} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6})$$
$$a_1 = 0$$
$$P(x) = \tfrac{2x^6 - 6x^5 + 5x^4 - x^2}{12}$$

e consequentemente

$$\sum_{k=1}^{n} k^5 = P(n+1) - P(0) = P(n+1)$$

Com uma linguagem de programação, como `calc`[4], *teremos*

Soma das quinta-potências de 1 até 10:

Calculando com o somatório :$\sum_{k=1}^{10} k^5 = 220825$

[4]Execute em Linux `calc < lista.calc`, se `lista.calc` estiver no disco. Ele deve acompanhar este livro

Usando a expressão polinomial:$P(n+1) = 220825$

O programa:

```
define f(n)
     {
     return (2*power(n,6) - 6*power(n,5) + 5*power(n,4) - power(n,
     }
define S(n,soma,k)
{
     k = 0; soma = 0;
     while (k <= n )
     {
          soma = soma + power(k,5);
          k++;
     }
     return soma;
}
printf("Soma das quintas potencias de 1 ateh 10 ");
printf("Calculando com o somatorio :");
S(10,0,0);
printf("Usando a expressão polinomial: ");
f(11);
quit
```

A solução geral, solicitada pela questão, é difícil de ser formalizada. Das experiências que fizemos acima podemos propor o seguinte algoritmo para a determinação da soma das potências p dos números naturais de 1 até n:

- *A diferença $\Delta P(x) = P(x+1) - P(x)$ é um polinômio de grau imediatamente inferior ao de P e nela desaparecem os termos de maior grau dos desenvolvimentos de $(x+1)^k$portanto,*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \Longrightarrow \Delta P(x) = \sum_{k=0}^{n} [a_k(x+1)^k - a_k x^k]$$

- *Como $(x+1)^k$ tem por coeficientes as linhas de ordem k do* triângulo de Pascal, *escrevemos o* triângulo *até a ordem n, omitindo os termos da forma C_k^k que são os coeficientes de $a_k x^k$ e a linha de ordem zero que corresponde ao a_0.*
- *A última linha do "esquema" são os coeficientes do polinômio que desejamos somar (não precisa ser exatamente as potências p dos números naturais... mas não vale a pena esta generalização porque ele se deduz da presente solução).*
- *Cada linha deve ser multiplicada por a_k em que k é a ordem da linha e o "esquema" assim obtido deve ser somado coluna por coluna para igualar com o correspondente elemento da ultima linha*

formando assim um sistema de $\underline{n-1}$ equações para determinar as incógnitas

$$a_{n-1}, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1$$

- *A matriz deste sistema é triângular superior estando na diagonal os números*

$$C_n^{n-1} = n, C_{n-1}^{n-2} = n-1, \ldots, C_2^1 = 2, C_1^0 = 1$$

portanto o determinante é $n!$ e assim o sistema tem solução única. Se considerassemos o coeficiente a_0 o sistema ficaria indeterminado, cada valor escolhido para a_0 seria uma nova solução possível.

(c) São verdadeiras as duas últimas afirmações.

(d) Como, para cada valor de k tem-se

$$k^p = P(p+1) - P(p)$$

ao somarmos restará apenas $P(n+1) - P(0)$.

Exemplo: 11 *Soma de um polinômio qualquer*

A generalização do problema acima é inútil, como veremos neste exemplo. Suponhamos que se deseje calcular

$$\sum_{k=0}^{n} Q(k)$$

em que Q é um polinômio de grau p. Mas como Q é um polinômio, este problema se subdivide em $p+1$ somas todas do tipo estudado acima.

---

4. Escreva uma soma de Riemann para $\int_0^a x^2$ e verifique que

$$\int_0^a x^2 \approx \frac{a^3}{6n^3}(n-1)(2n-1)n$$

Solução: 9

$$\int_0^a x^2 \approx S_n = \Delta x \sum_{k=0}^{n} (0 + k\Delta x)^2 \; ; \; \Delta x = \frac{a}{n}$$
$$S_n = \Delta x \sum_{k=0}^{n} (k\Delta x)^2) = \Delta x^3 \sum_{k=0}^{n} k^2$$
$$S_n = \frac{a^3}{n^3}\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \frac{a^3}{6n^3}(n-1)(2n-1)n$$
$$S_n \approx \frac{a^3}{3}$$

a última linha foi obtida pela equivalência do comportamento assintótico de S_n.

---

5. **Solução: 10** *Resolvido no item anterior.*

2.8 Sucessões geradas por somas de Riemann

Em vários pontos deste livro fazemos referência à somas de Riemann como um método para construir sucessões. Este fato será usado mais a frente na obtenção de fórmulas de integração.

Vamos aqui registrar alguns testes feitos por programas de computação que podem servir para sua análise, na falta de um computador para fazer as experiências, ou podem servir de guia para que você repita as experiências com o programa que se encontra ao final desta seção.

2.8.1 Amostragem estatística com somas de Riemann

1. $\int_0^1 x^2$

=====================================

Função $f(x) = x^2$

Intervalo $[0, 1]$

====================================

O início do intervalo de integração 0

O fim do intervalo de integração 1

Início dos testes

====================================

deltax = 0.1

valor da SR 0.385

———————————-

deltax = 0.01

valor da SR 0.32835

———————————-

deltax = 0.001

valor da SR 0.3328335

———————————-

deltax = 0.0001

valor da SR 0.333383335

———————————-

deltax = 1e-05

valor da SR 0.333338333349

————————————-

deltax = 1e-06

valor da SR 0.333332833334

————————————-

2. $\int_{-1}^{1} x^2$

====================================

Função $f(x) = x^2$

Intervalo $[-1, 1]$

====================================

O início do intervalo de integração -1

O fim do intervalo de integração 1

Início dos testes

====================================

deltax = 0.1

valor da SR 0.77

————————————-

deltax = 0.01

valor da SR 0.6667

————————————-

deltax = 0.001

valor da SR 0.666667

————————————-

deltax = 0.0001

valor da SR 0.66676667

————————————-

deltax = 1e-05

valor da SR 0.666676666699

————————————-

deltax = 1e-06

valor da SR 0.666666666668

————————————-

3. $\int_{0}^{2} x^2$

====================================

Função $f(x) = x^2$

Intervalo $[0, 2]$

====================================

O início do intervalo de integração 0

O fim do intervalo de integração 2

Início dos testes

====================================

deltax = 0.1

valor da SR 2.47

————————————-

deltax = 0.01

valor da SR 2.6467

————————————-

deltax = 0.001

valor da SR 2.668667

————————————-

deltax = 0.0001

valor da SR 2.66686667

————————————-

deltax = 1e-05

valor da SR 2.6666466667

————————————-

deltax = 1e-06

valor da SR 2.66666866655

————————————-

4. $\int_{0}^{10} x^2$

====================================

Função $f(x) = x^2$

Intervalo $[0, 10]$

====================================

O início do intervalo de integração 0

O fim do intervalo de integração 10

Início dos testes

====================================

deltax = 0.1

valor da SR 338.35

———————————-

deltax = 0.01

valor da SR 333.8335

———————————-

deltax = 0.001

valor da SR 333.383335

———————————-

deltax = 0.0001

valor da SR 333.33833335

———————————-

deltax = 1e-05

valor da SR 333.333833324

———————————-

deltax = 1e-06

valor da SR 333.333383359

———————————-

5. $\int\limits_0^1 \frac{1}{x}$

====================================

Função $f(x) = \frac{1}{x}$

Intervalo $(0, 1]$

====================================

O início do intervalo de integração 0

O fim do intervalo de integração 1

Início dos testes

====================================

deltax = 0.1

valor da SR 2.92896825397

———————————-

deltax = 0.01

valor da SR 5.17737751764

———————————-

deltax = 0.001

valor da SR 7.48447086055

———————————-

deltax = 0.0001

valor da SR 9.78760603604

———————————-

deltax = 1e-05

valor da SR 12.0901461299

———————————-

deltax = 1e-06

valor da SR 14.3927257229

———————————-

Os valores das somas de Riemann associadas a integral

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{x}$$

no intervalo $(0, 1)$ não parecem convergir, aparentemente crescem "como" uma progressão aritmética de razão 2. Estes dados não são conclusivos, é uma amostragem muito pequena. Teremos que provar que isto é verdade.

6. $\int\limits_1^2 \frac{1}{x} = ln(2)$

====================================

Função $f(x) = \frac{1}{x}$

Intervalo $[1, 2]$

====================================

O início do intervalo de integração 1

O fim do intervalo de integração 2

Início dos testes

====================================

deltax = 0.1

valor da SR 0.718771403175

———————————-

deltax = 0.01

valor da SR 0.695653430482

————————————————-

deltax = 0.001

valor da SR 0.69389724306

————————————————-

deltax = 0.0001

valor da SR 0.693222181185

————————————————-

deltax = 1e-05

valor da SR 0.693149680565

————————————————-

deltax = 1e-06

valor da SR 0.693147930576

————————————————-

Valor para comparação obtido com uma máquina de calcular: $ln(2) =$ .69314718055994530942

7. $\int\limits_1^2 \frac{1}{x} = ln(3)$

====================================

Função $f(x) = \frac{1}{x}$

Intervalo $[1, 3]$

====================================

O início do intervalo de integração 1

O fim do intervalo de integração 3

Início dos testes

====================================

deltax = 0.1

valor da SR 1.13268554362

————————————————-

deltax = 0.01

valor da SR 1.10528636266

————————————————-

deltax = 0.001

valor da SR 1.09927902941

————————————————-

deltax = 0.0001

valor da SR 1.09864562274

————————————————-

deltax = 1e-05

valor da SR 1.09861562201

————————————————-

deltax = 1e-06

valor da SR 1.09861262202

————————————————-

ln(3) = 1.0986122886681096914

8. $\int\limits_1^4 \frac{1}{x} = ln(4)$

====================================

Função $f(x) = \frac{1}{x}$

Intervalo $[1, 4]$

====================================

O início do intervalo de integração 1

O fim do intervalo de integração 4

Início dos testes

====================================

deltax = 0.1

valor da SR 1.42457478497

————————————————-

deltax = 0.01

valor da SR 1.39255217354

————————————————-

deltax = 0.001

valor da SR 1.38691943924

————————————————-

deltax = 0.0001

valor da SR 1.3863318619

————————————————-

deltax = 1e-05

valor da SR 1.38629811112

————————————————-

deltax = 1e-06

valor da SR 1.38629473613

————————————-

ln(4) = 1.38629436111989061883

9. $\int_{1}^{10} \frac{1}{x} = ln(10)$

====================================

Função $f(x) = \frac{1}{x}$

Intervalo $[1, 10]$

====================================

O início do intervalo de integração 1

O fim do intervalo de integração 10

Início dos testes

====================================

deltax = 0.1

valor da SR 2.35840926367

————————————-

deltax = 0.01

valor da SR 2.30809334291

————————————-

deltax = 0.001

valor da SR 2.30313517549

————————————-

deltax = 0.0001

valor da SR 2.30264009382

————————————-

deltax = 1e-05

valor da SR 2.30259059301

————————————-

deltax = 1e-06

valor da SR 2.30258564295

————————————-

ln(10) = 2.30258509299404568402

10. $\int_{1}^{10} \frac{1}{x^2}$

====================================

Função $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Intervalo $[1, 10]$

====================================

O início do intervalo de integração 1

O fim do intervalo de integração 10

Início dos testes

====================================

deltax = 0.1

valor da SR 0.952161690184

————————————-

deltax = 0.01

valor da SR 0.905066649667

————————————-

deltax = 0.001

valor da SR 0.9005051665

————————————-

deltax = 0.0001

valor da SR 0.900050501665

————————————-

deltax = 1e-05

valor da SR 0.900005050015

————————————-

deltax = 1e-06

valor da SR 0.900000505

————————————-

Conclusão: aparentemente as somas de Riemann associadas a esta integral produzem uma sucessão convergente. O valor da integral é o limite destas sucessões.

11. $\int_{1}^{20} \frac{1}{x^2}$

====================================

Função $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Intervalo $[1, 20]$

====================================

O início do intervalo de integração 1

O fim do intervalo de integração 20

Início dos testes

====================================

deltax = 0.1

valor da SR 1.00153814848

————————————-

deltax = 0.01

valor da SR 0.95500416425

————————————-

deltax = 0.001

valor da SR 0.950498916646

————————————-

deltax = 0.0001

valor da SR 0.950050126666

————————————-

deltax = 1e-05

valor da SR 0.950005012518

————————————-

deltax = 1e-06

valor da SR 0.95000050127

————————————-

Conclusão: aparentemente as somas de Riemann associadas a esta integral produzem uma sucessão convergente. O valor da integral é o limite destas sucessões.

12. $\int_1^{50} \frac{1}{x^2}$

====================================

Função $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Intervalo [1,50]

====================================

O início do intervalo de integração 1

O fim do intervalo de integração 50

Início dos testes

====================================

deltax = 0.1

valor da SR 1.03164334348

————————————-

deltax = 0.01

valor da SR 0.9850186662

————————————-

deltax = 0.001

valor da SR 0.980500366665

————————————-

deltax = 0.0001

valor da SR 0.980049981667

————————————-

deltax = 1e-05

valor da SR 0.980004998018

————————————-

deltax = 1e-06

valor da SR 0.980000500219

————————————-

Conclusão: aparentemente as somas de Riemann associadas a esta integral produzem uma sucessão convergente. O valor da integral é o limite destas sucessões.

Mais, as integrais

$$\int_1^{10} \frac{1}{x^2}, \int_1^{20} \frac{1}{x^2}, \int_1^{50} \frac{1}{x^2}$$

aparentam convergir para o mesmo valor. Isto é verdade e tem que ser demonstrado. A verdade é mais forte: a integral desta função, na semireta $[1, \infty)$ converge para um valor parecido com este limite que está sendo sugerido: 1 Isto precisa ser demonstrado:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} = 1$$

13. $\int_{-1}^{\infty} \frac{1}{x^2}$

====================================

Função $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Intervalo [-1,1]

====================================

O início do intervalo de integração -1

O fim do intervalo de integração 1

Inicio dos testes

====================================

deltax = 0.1

valor da SR 5.19229685853e+30

———————————-

deltax = 0.01

valor da SR 1.76424960684e+28

———————————-

deltax = 0.001

valor da SR 1.2876921963e+27

———————————-

deltax = 0.0001

valor da SR 1.13613971721e+22

———————————-

deltax = 1e-05

valor da SR 2.72331234923e+18

———————————-

deltax = 1e-06

valor da SR 1.59490943152e+16

———————————-

Conclusão: aparentemente as somas de Riemann associadas a esta integral NÃO produzem uma sucessão convergente. A integral não converge, ou simplesmente, a integral não existe Isto precisa ser demonstrado e será feito mais a frente.

Observação: 10 *Inferência estatística e demonstração*

Aqui temos, de um lado, a diferença entre a Matemática e as ciências experimentais. Um biólogo, um físico, um químico, faz experiências no laboratório e demonstra *os resultados usando os métodos da estatística. É algo parecido com uma "pesquisa de opinião nos processos eleitorais"se for conduzida com seriedade. Amostragem é um método da Estatística para inferir uma afirmação verdadeira de uma "população". "população"é o nome técnico de uma "região"(geometria), de um "tipo de partículas (fi'sica), de um "tipo de material químico"(química), de um "tipo de células, virus, bactérias..."(biologia).*

Em Matemática também podemos usar estes métodos para descobrir um teorema. Depois temos que lhe aplicar as regras lógicas e mostrar que ele é verdadeiro a partir de outros teoremas da teoria em que ele vai se enquadrar. Um exemplo disto é uma pesquisa que vem sendo realizado há alguns anos por matemáticos da área de Teoria dos números. Eles estão usando uma rede de computadores para gerar números primos e estão procurando uma lei de formação para (eles esperam) algumas cadéias de números primos. Até agora descobriram algumas relações e parece que algumas delas já foram demonstradas.

2.8.2 Um programa para executar os testes com somas de Riemann

Abaixo você tem uma 'folha de trabalho" na linguagem Python. Se você copiar o texto para o arquivo `riemann.py` poderá executá-lo com

`python riemann.py`

numa shell do `Linux`.

O resultado será semelhante aos testes apresentados acima. Além disto você poderá introduzir modificações na "folha de trabalho", trocando as definições das funções ou a precisão do `deltax`, para produzir outros testes.

Você pode se dirigir ao autor, `tarcisio@member.ams.org` e pedir uma cópia dos programas deste livro. Se você copiar os programas manualmente, observe a tabulação que a linguagem `Python` é sensível à tabulação.

```
## Calcula somas de Riemann

def riemann(f, inicio, fim,deltax):
    soma = 0;
    while inicio < fim:
            soma = soma + f(inicio)
            inicio = inicio + deltax
    soma = soma*deltax
    return soma


def f1 (x):
    return x*x


def f3(x):
    return x


def f4(x):
    return


def inv(x):
    if x==0: y=0
    else: y = 1./x
```

```
    return y

### area de comandos (scripts).
### Na linha
### print "valor da SR ", riemann(f2,inicio,fim, deltax)
### troque f2 pelo nome da funcao cuja soma de Riemann voce
### testar
inicio = input("O inicio do intervalo de integracao ")
fim = input("O fim do intervalo de integracao ")
print "Inicio dos testes "
print "=================================="
deltax = 0.1
###
### Calcula somas de Riemann até que deltax
### seja menor que 0.000001.

while deltax > 0.000001:
        print "deltax = ", deltax
        print "valor da SR ", riemann(f2,inicio,fim, deltax)
        print -——————————————-"
        deltax = deltax/10
```

2.9 Construção dos números reais pelo método de Cauchy.

Este é um projeto que extrapola o programa da disciplina "Cálculo Diferencial e Integral". Nós vamos aqui apenas delinear o projeto indicando as etapas. No livro contendo a solução dos exercícios, você poderá encontrar o projeto desenvolvido resumidamente.

1. uma classificação das sucessões. Construa uma classificação das sucessões, escolha um método qualquer e crie uma classificação.

2. use os conceitos `crescente, monótona, decrescente, oscilante`, `limitada, não limitada` para criar uma classificação para as sucessões. Tente definir o conceito `comportamento assintótico`. Reconstrua sua classificação.

3. sucessão de Cauchy, defina este conceito. Verifique que algumas das classes defindas anteriormente caem na classe das sucessões de Cauchy.

4. O conjunto $\mathcal{C}(\mathbf{N})$ das sucessões de Cauchy é um anel com divisores de zero.

5. Solução para o problema dos divisores de zero é considerar equivalentes as sucessões que tenham mesmo limite. Porque aquelas que se anularem em alguns pontos, mas não tiverem um comportamento assintótico nulo, deixarão de anular a partir de um certo ponto. Este comportamento assintótico é o que chamamos de `limite`. Isto resolve o problema dos divisores de zero, quer dizer que "$\mathcal{C}(\mathbf{N})/\equiv$" `o conjunto das classes de equivalência módulo-relação de equivalência` é um anel sem `divisores de zero` no qual todos os elementos tem inversos, logo um corpo, isto é $\mathbf{R}$. Mostre isto em todos os detalhes, (escreva um livro...).

Parte II

Derivação e Integração univariadas

Capítulo 3

Introdução à Integração.

3.1 A integral de Riemann

Neste capítulo vamos discutir a *integral* que foi apresentada, até agora, de forma intuitiva e geométrica.
Vamos descrever, com alguma simplicidade, o método de integração, atribuido ao matemático alemão, Bernard Riemann, as somas de Riemann, como aproximação para o cálculo da integral.
Aqui definiremos a integral como se costuma estudar nos cursos de *Cálculo Diferencial e Integral* e faremos alguns cálculos númericos de integrais. Em capítulo mais a frente voltaremos o assunto associando a integral e a derivada quando mais alguns resultados poderão então ser deduzidos inclusive um teorema denominado *Teorema Fundamental do cálculo* contendo uma fórmula para cálculo de integrais.
Neste capítulo vamos aprofundar o significado de

$$\int_0^a x^2 = \frac{a^3}{3}$$

enunciando assim, uma primeira versão do Teorema Fundamental do Cálculo.

3.2 Integração geométrica.

Vamos começar calculando aproximadamente várias integrais para tornar "mecânico" o uso da "soma de Riemann" como método de aproximação de integrais.

Neste livro a integral representa a área algébrica delimitada pelo gráfico de uma função f entre dois pontos dados de seu domínio, esta é a forma de se interpretar a integral no Cálculo: o símbolo $\int_a^b f$ representa esta área limitada pelo gráfico de f e o eixo OX desde $x = a$ até $x = b$.

Exercícios: 20 *Cálculo aproximado da integral*

1. *Represente geométricamente as seguintes integrais:*

a) $\int_{-3}^{3} 4$	b) $\int_{0}^{3} 4$	c) $\int_{3}^{0} 4$
d) $\int_{-3}^{3} 4x$	e) $\int_{-2}^{3} 4x$	f) $\int_{0}^{3} 4x$
g) $\int_{-3}^{10} 4x+3$	h) $\int_{-1}^{10} 4x-3$	i) $\int_{3}^{-3} 3-4x$
j) $\int_{-3}^{3} x+4$	k) $\int_{0}^{3} x-4$	l) $\int_{-3}^{0} 4-x$
m) $\int_{-3}^{3} x^2+2x+1$	n) $\int_{0}^{3} 1-x^2$	o) $\int_{3}^{0} x^2-4$

2. *Calcule as integrais indicadas na questão anterior que você souber calcular.*

3. *Calcule aproximadamente as integrais:*

   a) $\int_{-3}^{3} x^2+2x+1$ b) $\int_{0}^{3} 1-x^2$ c) $\int_{-3}^{3} 4-x^2$

   Faça, por exemplo, uma aproximação das áreas com retângulos,trapésios ou triângulos, conforme for conveniente.

4. *Como*

   $$f(x) = x^2+2x+1 = h(x)+g(x)+r(x)\ ;\ h(x) = x^2; g(x) = 2x;\ r(x) = 1$$

   então se convença, com auxílio de gráfico, que

   $$\int_a^b x^2+2x+1 = \int_a^b x^2 + \int_a^b 2x + \int_a^b 1$$

3.3 Expressão formal do cálculo da integral

Nós ainda não sabemos calcular as tres integrais
$\int_{-3}^{3} x^2+2x+1 \quad \int_{0}^{3} 1-x^2 \quad \int_{-3}^{3} 4-x^2.$

São regiões limitadas por contornos não retilíneos. Neste momento tudo que podemos fazer é calcular estas áreas aproximadamente. Isto será ilustrada em detalhe mais abaixo e será discutido com mais profundidade em outro capítulo.

Uma simples observação pode entretanto nos dar subsídios para um passo mais além. Veja que

$$f(x) = x^2+2x+1 = g(x)+h(x)+r(x)\ ;\ g(x) = x^2\ ;\ h(x) = 2x\ ;\ r(x) = 1$$

Uma soma de funções, logo a área entre f e o eixo OX vai ser a soma das áreas de g, h, r limitadas pelos respectivos gráficos e o eixo OX.

Simbolicamente:

$$\int_{-3}^{3} x^2+2x+1 = \int_{-3}^{3} x^2 + \int_{-3}^{3} 2x + \int_{-3}^{3} 1.$$

Pelo menos duas dessas integrais são fáceis de calcular, assim dividimos a dificuldade em pedaços...

Para calcular aproximadamente $\int_a^b f$ podemos subdividir a região em triângulos, retângulos ou trapésios, *conforme a conveniência* ou de acordo com as possibilidades geométricas da figura. Entretanto não se ganha muito com este detalhe, muito mais se ganha na quantidade de subdivisões, e, naturalmente com o uso de um programa de computador. A expressão formal que se presta facilmente para se utilizar num programa é uma *soma de Riemann*. Experimente as funções `riemann(), riemann_grafun()` no arquivo `riemann.py`. Digite `python riemann.py` depois de editar o arquivo. Vejas as últimas linhas do mesmo.

As somas de Riemann usam exclusivamente retângulos. Para obter estes retângulos, se sub-divide o intervalo $[a, b]$ em n sub-intervalos

o—|—|—|—|—|—|—|—|—|—|—o

a b

as subdivisões satisfazem a uma progressão aritmética de razao $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Este valor Δx é também o tamanho, (medida), da base de cada um dos sub-intervalos.

Os pontos que marcam as sub-divisões são:

$$a, a+\Delta x, a+2\Delta x, a+3\Delta x, \cdots a+k\Delta x, \cdots, a+(n-1)\Delta x = b-\Delta x$$

Na figura (fig. 3.1) página 101, você pode ver os retângulos de base 0.5 na aproximação da integral. Veja também uma aproximação "mais fina"(ou mais precisa) na (fig. 3.2) página 106

Figura 3.1: Soma de Rieman para a função $y = 0.5sen(6x)+9-x^2$ com passo de integracao 0.2

Observe que o último "nó" não é b, mas sim "$b-\Delta$". Para cada uma dessas bases, consideraremos a altura $f(a+k\Delta x)$ em que k varia desde 0 até $n-1$:

$$f(a), f(a+\Delta x), f(a+2\Delta x), \cdots f(a+k\Delta x), \cdots, f(a+(n-1)\Delta x).$$

Quer dizer que os retângulos tem por área:

$$f(a)\Delta x, f(a+\Delta x)\Delta x, f(a+2\Delta x)\Delta x, \cdots f(a+(n-1)\Delta x)\Delta x$$

A soma destas áreas é o valor aproximado da integral:

Definição: 9 *Soma de Riemann.*

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\Delta x)\Delta x.$$

Na proxima seção alguns cálculos feitos com um programa em Python vão ilustrar numericamente e graficamente o significado da soma de Riemann

Exercícios: 21 *Expressão formal do cálculo da integral*

1. *Escreva somas de Riemann, com 10 sub-intervalos, para aproximar cada uma das integrais abaixo:*

$$a)\ \int_{-3}^{3} x^2+2x+1 \quad b)\ \int_{0}^{3} 1-x^2 \quad c)\ \int_{-3}^{3} 4-x^2.$$

2. *Re-escreva as somas de Riemann aumentando a precisão, de modo que os sub-intervalos tenha medida* 0.1 *Use uma calculadora ou computador e calcule estas integrais.*

3. *Descubra experimentalmente um ponto* $e \in \mathbf{R}$ *tal que*

$$\int_1^e \frac{1}{x} = 1$$

4. *Verifique que das duas somas de Riemann abaixo, uma fornece uma aproximação por falta e a outra por excesso da integral*

$$\int_0^1 x^2\ ;\ \sum_0^{n-1} \frac{k^2}{n^2}\frac{1}{n}\ ;\sum_1^{n} \frac{k^2}{n^2}\frac{1}{n}$$

identifique quem é quem. *Use* `riemann() in riemann.py`.

5. *Verifique que das duas somas de Riemann abaixo, uma fornece uma aproximação por falta e a outra por excesso da integral*

$$\int_0^1 x^p\ ;\ p \in \mathbf{N}\ ;\ p > 1\ ;\ \sum_0^{n-1} \frac{k^p}{n^p}\frac{1}{n}\ ;\ \sum_1^{n} \frac{k^p}{n^p}\frac{1}{n}$$

identifique quem é quem . *Use* `riemann() in riemann.py`.

6. *Verifique experimentalmente (somas de Riemann) que* $\int_0^1 x^2 = \frac{1}{3}$. *Use* `riemann() in riemann.py`.

7. *soma de Riemann*Prove a desigualdade:*

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^2 < n^3 \int_0^1 x^2 < \sum_{k=1}^{n} k^2$$

8. *soma de Riemann*Prove a desigualdade:*

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^3 < n^4 \int_0^1 x^3 < \sum_{k=1}^{n} k^3$$

9. *soma de Riemann*Prove a desigualdade:*

$$\frac{a^3}{n^4}\sum_{k=0}^{n-1} k^3 < \int_0^a x^3 < \frac{a^3}{n^4}\sum_{k=1}^{n} k^3$$

10. *soma de Riemann*Prove a desigualdade:*

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^p < n^{p+1} \int_0^1 x^p < \sum_{k=1}^{n} k^p$$

11. *soma de Riemann*Prove a desigualdade:*

$$\frac{a^4}{n^4}\sum_{k=0}^{n-1} k^3 < \int_0^a x^3 < \frac{a^4}{n^4}\sum_{k=1}^{n} k^3$$

12. *soma de Riemann*Prove a desigualdade:*

$$\frac{a^{p+1}}{n^{p+1}}\sum_{k=0}^{n-1} k^p < \int_0^a x^p < \frac{a^{p+1}}{n^{p+1}}\sum_{k=1}^{n} k^3$$

13. *Expresse como uma soma de áreas de triângulos isósceles, (ou de retângulos0 uma aproximação para a área do círculo de raio 1.*

3.4 Cálculo “numérico” da integral

Vamos calcular as áreas dos retângulos $f(x) = x^2 + 2x + 1$ Os dados tabelas abaixo mostram a saida de dados de um programa em Python para o cálculo da integral do exercício 3, com $\Delta x = 0.2$.

O gráfico 3.2, página 106, mostra os retângulos cujas áreas se encontram calculadas abaixo. O gráfico foi feito com auxílio do `Gnuplot`.

```
x = -3      f(x)*Delta     = 0.8  soma acumulada   = 0.8
x = -2.8    f(x)*Delta  = 0.648  soma acumulada = 1.448
x = -2.6    f(x)*Delta  = 0.512  soma acumulada = 1.96
x = -2.4    f(x)*Delta  = 0.392  soma acumulada = 2.352
x = -2.2    f(x)*Delta  = 0.288  soma acumulada = 2.64
x = -2.0    f(x)*Delta  = 0.2  soma acumulada   = 2.84
x = -1.8    f(x)*Delta  = 0.128  soma acumulada = 2.968
x = -1.6    f(x)*Delta  = 0.072  soma acumulada = 3.04
x = -1.4    f(x)*Delta  = 0.032  soma acumulada = 3.072
x = -1.2    f(x)*Delta  = 0.008  soma acumulada = 3.08
x = -1.0    f(x)*Delta  = 0.0  soma acumulada   = 3.08
x = -0.8    f(x)*Delta  = 0.008  soma acumulada = 3.088
x = -0.6    f(x)*Delta  = 0.032  soma acumulada = 3.12
x = -0.4    f(x)*Delta  = 0.072  soma acumulada = 3.192
x = -0.2    f(x)*Delta  = 0.128  soma acumulada = 3.32
x = 0.0000003  f(x)*Delta  = 0.2  soma acumulada   = 3.52
x = 0.2  f(x)*Delta  = 0.288  soma acumulada = 3.808
x = 0.4  f(x)*Delta  = 0.392  soma acumulada = 4.2
x = 0.6  f(x)*Delta  = 0.512  soma acumulada = 4.712
x = 0.8  f(x)*Delta  = 0.648  soma acumulada = 5.36
x = 1.0  f(x)*Delta  = 0.8  soma acumulada   = 6.16
x = 1.2  f(x)*Delta  = 0.968  soma acumulada = 7.128
x = 1.4  f(x)*Delta  = 1.152  soma acumulada = 8.28
x = 1.6  f(x)*Delta  = 1.352  soma acumulada = 9.632
x = 1.8  f(x)*Delta  = 1.568  soma acumulada = 11.2
x = 2.0  f(x)*Delta  = 1.8  soma acumulada   = 13.0
x = 2.2  f(x)*Delta  = 2.048  soma acumulada = 15.048
x = 2.4  f(x)*Delta  = 2.312  soma acumulada = 17.36
x = 2.6  f(x)*Delta  = 2.592  soma acumulada = 19.952
x = 2.8  f(x)*Delta  = 2.888  soma acumulada = 22.84

deltax = 0.2\index{integral!aproxima\cedi\~ao}

Valor aproximado da integral  22.84
```

Repetindo os cálculos com valores menores para o Δx temos o seguinte:

```
a base de cada retangulo eh deltax = 0.12
o valor da integral aproximado eh = 23.2944
\index{integral!aproxima\cedi\~ao}
a base de cada retangulo eh deltax = 0.06
o valor da integral aproximado eh = 23.6436
\index{integral!aproxima\cedi\~ao}
a base de cada retangulo eh deltax = 0.006
o valor da integral aproximado eh = 24.060036
```

O valor exato desta integral é: 24, e um programa em `Python` para calculá-la, aproximadamente, é:

Exemplo: 12 *Um programa em* `Python` *para calcular integrais*

```
## inicio do arquivo integral.py

def f(x):
    return x*x ## função f a ser integrada.


def integral(f,inicio,fim):
    inicio = input("inicio do intervalo [a,b] --> a =")
    fim = input("fim do intervalo [a,b] --> b =")
    soma = 0
    deltax = 0.0000001 ## a precisão do cálculo.
    while (inicio < fim):
            soma = soma + f(inicio)
            inicio = inicio + deltax
    soma = soma*deltax
    return soma


    inicio = 0
    fim = 1
    print integral(f,inicio,fim)
    ## fim do arquivo integral.py
```

Rode este programa assim. Na linha de comandos do LinuX digite:

$ python integral.py

Você pode alterar na definição de f, veja no programa onde está “def f(x)”, a equação e assim calcular outras integrais.

O programa pede os extremos do intervalo de integração.

Observação: 11 *Comentando o programa*

Não considere como ponto de honra entender um programa de computação agora. O autor deste livro levou quase 15 anos para conseguir entender os programas de computação... Use os programas, e aos poucos eles passarão a fazer parte de sua vida.

Existe uma regra quase sem exceção, em Unix (LinuX é Unix). O símbolo # representa comentário e o programa ignora o que vier depois deste sinal até o final da linha.

Assim podemos inserir nos programas comentários para o outros que forem usar os programas. No programa você pode encontrar o comentário “a precisão do cálculo”ao lado da variável “deltax”. Esta é medida da base dos retângulos com a integral está sendo calculada. Troque por valor menor se quiser ter mais precisão, mas verá que logo deixa de valer a pena, porque a precisão máxima da máquina será atingida.

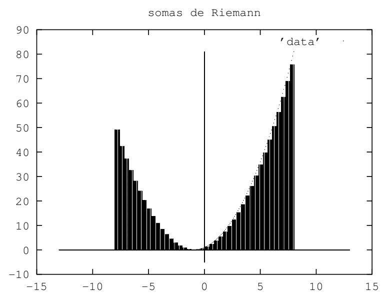

Figura 3.2: Gráficos dos retângulos da soma de Riemann para $\int\limits_{-3}^{3} x^2+2x+1$ com passo 0.2.

Entretanto se você iniciar os cáculos com valores maiores para "deltax", ao substituir valores menores, verá que cálculo se torna mais preciso. Experimente iniciar com

$$deltax = 0.1$$

e depois o substitua sucessivamente por $0.01, 0.001, 0.0001\cdots$.

Se você tiver executado a experiência, lhe terá aparecido ante os olhos a sucessão:

$$0.385, 0.32835, 0.3328335, 0.333383335, 0.333338333349, 0.333332833334$$

correspondentes a $\int\limits_0^1 x^2$ *calculada com este programa em que usamos*

$$deltax \in \{0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001, 0.000001\}$$

Se você for além mais um pouquinho terá a desgradável surpreza de ver que a máquina começa se perder... mas é bom que isto aconteça para que você desmistifique a máquina. Nós, e não as máquinas, sabemos com contornar esta dificuldade para obter precisões ainda maiores, mais isto não cabe ser discutido aqui.

Na próxima lista de exercícios nós vamos usar o que o programa nos ofereceu, (supondo que você tenha usado o programa, naturalmente).

Observe que a sucessão das somas de Riemann parece produzir uma sucessão de números com um comportamento assintótico *presível.*

Para uso no exercício abaixo, use a seguinte versão do programa[1] `integral.py`

Mais adiante vamos lhe apresentar uma outra alternativa computacional usando uma "máquina de calcular" bem poderosa que pode estar instalada nos computadores a que você tiver acesso.

[1]Os programas usados neste livro podem ser conseguidos via e-mail com o autor.

Observe que o programa abaixo <u>não se encontra</u> no arquivo `riemann.py`. Você deverá digitá-lo e gravá-lo em sua área de trabalho.

```
## inicio do arquivo integral.py

def f(x):
    return x*x ## função f a ser integrada.


def integral(f,inicio,fim):
    fim = 1
    soma = 0
    deltax = 0.1; ## precisão incial do cálculo.
    while deltax > 0.0000001:
        soma = 0
        x = deltax
        while (x < fim):
            soma = soma + f(x)
            x = x + deltax
        soma = soma*deltax
        print soma
        deltax = deltax/2
    return soma


print integral(f,inicio,fim)
## fim do arquivo integral.py
```

Esta versão difere da anterior nos seguintes pontos, agora "inicio"vale "deltax"e "fim=1", quer dizer que ele calcula

$$\int\limits_0^1 f(x).$$

Além disto, o próprio programa sai dividindo sucessivamente "deltax"por dois, você tem apenas que sentar-se e olhar o resultado...

Para rodar este programa faça o seguinte:

- Primeiro copie o texto do programa para um arquivo chamado `integral.py`. Alternativa, arrume um disco com os programas com o autor do livro.
- Digite, numa "shell" do LinuX,

  "python /home/seu-nome/calculo/integral.py"

  porque estamos supondo que você está trabalhando num diretorio chamado "calculo" em sua área de trabalho.

- Qualquer dúvida, contacte tarcisioe-math.ams.org descrevendo cuidadosamente a dificuldade encontrada. Junte cópia de eventuais mensagens de erro.

Exercícios: 22 *Cálculo "numérico" da integral*

1. *Rode o programa* `integral.py` *com as integrais abaixo e decida em que casos parece haver um comportamento assintótico.*

a) $\int_0^1 x^3$	b) $\int_0^1 \frac{1}{x}$	c) $\int_0^1 x+3$	d) $\int_0^1 \frac{1}{x^2}$
e) $\int_0^1 x^4$	f) $\int_0^1 \frac{x+1}{x}$	g) $\int_0^1 \frac{x}{x+1}$	h) $\int_0^1 \frac{x+1}{x+2}$

2. *Existem exatamente três casos em que o comportamento assintótico da sucessão de Somas de Riemann fica indefinido. Tente encontrar uma explicação.*

3. *Verifique que se, numa soma de Riemann para $\int_a^b f$, os sub-intervalos tiverem todos o mesmo tamanho $\frac{b-a}{n}$ então a soma de Riemann é um multiplo de $b-a$ por uma média de valores de f, explicite que média é esta.*

4. *Usando o resultado do exercício anterior, prove que se $\int_a^b f$ existir, então*

$$\int_a^b f = M(b-a)$$

explicitando o valor de M.

5. *partição do intervalo A metodologia usada pelo programa* `integral.py` *consiste em, sucessivamente, dividir os intervalos na metade para obter uma nova coleção de sub-intervalos para a soma de Riemann seguinte. Considere a soma de Riemann*

$$\sum_{k=1}^{n} f(a+k\Delta x)\Delta x$$

e escreva a expressão da soma de Riemann em que $\Delta x'$ é a metade de $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

6. *Suponha que os valores*

$$V_0, V_1, \cdots, V_{n-1}$$

são os resultados das medidas da velocidade de um carro tomadas a intervalos regulares (iguais) do tempo $t \in [a,b]$.

   (a) *Qual a velocidade média V_m ?*

   (b) *Qual distância percorrida pelo veículo?*

   (c) *Expresse este valores numa fórmula usando a expressão da integral.*

7. *Descubra, geometricamente, as soluções da equação:*

$$\int_0^x 3-t = \int_6^x t-3$$

8. *Transforme numa equação algébrica a equação:*

$$\int_0^x 3-t = \int_6^x t-3$$

9. *Verifique quais das integrais abaixo é positiva:*

a) $\int_0^{2\pi} x+sen(x)$	b) $\int_0^2 x-cos(x)$

Observação: 12 *Partição de um intervalo*
Partição, refinamento da partição, sucessões, função escada.

3.5 Cálculo de algumas integrais.

Vamos mostrar, com um exemplo, que em alguns casos é possível calcular com precisão (exatamente) a integral de uma função cujo gráfico não é constituido de retas.

Não vamos insistir nestas idéias no presente capítulo porque há um capítulo mais a frente em que retomaremos o cálculo das integrais quando então você será conduzido às fórmulas de integração. Neste momento o objetivo está bem indicado no título, "cálculo numérico das integrais".

Entretanto, a base do que faremos no futuro está aqui, nestes casos particulares que estamos estudando.

Exemplo: 13 *Área sob parábolas*

Vamos calcular a área $\int_0^a x^2$; $a > 0$. Se dividirmos em n sub-intervalos o intervalo de integração $[0,a]$ *isto quer dizer que selecionamos $n-1$ pontos intermediários que chamaremos "nós" entre 0 e a. Isto pode ser feito de muitas maneiras*[2]*, por exemplo, podemos subdividir o intervalo em sub-intervalos de mesmo comprimento: $\frac{a}{n}$. Neste caso os nós serão:*

Dizemos ainda que fizemos uma partição no intervalo.

$$0 = \frac{0 \text{ x } a}{n}, \frac{a}{n}, \frac{2a}{n}, \frac{3a}{n}, \cdots, \frac{na}{n} = a \; ; n > 3$$

Podemos considerar retângulos que tenham por base cada um destes sub-intervalos e $f(\frac{ka}{n})$ como altura, ver (fig. 3.1) na página 101.

[2]Veja aqui um exemplo da multiplicidade de representação dos números, uma integral é um número.

Cada retângulo terá por área: $\frac{a}{n}f(\frac{ka}{n})$ *em que* k *varia desde* 1 *até* n. *Temos assim:*

$$A_k = \frac{a}{n}f(\frac{ka}{n}) = \frac{a}{n}\frac{k^2a^2}{n^2} \tag{3.1}$$

$$A_k = \frac{k^2a^3}{n^3} = k^2\frac{a^3}{n^3} \tag{3.2}$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n} k^2\frac{a^3}{n^3} \tag{3.3}$$

$$s_n = \frac{a^3}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 \tag{3.4}$$

Exemplo: 14 *Cálculo computacional*

Com uma máquina de calcular dotada de memória, você pode descobrir um valor aproximado para $\int_0^a x^2$ *para o valor escolhido para* a*, e um valor também escolhido de* n*, (precisão escolhida).*

Vamos usar $n = 10$ *temos:*

$$s_{10} = \frac{a^3}{1000}(1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2) == \frac{a^3}{1000}395 = 0.395a^3.$$

Mais concreto, $\int_0^1 \approx 0.395.$

Com auxílio do computador as coisas ainda podem ficar mais claras. Vamos ver uma alternativa aos programas em `Python` *que lhe apresentamos acima. Aqui vamos usar uma "máquina de calcular"* `calc` *que pode estar instalada nos computadores a que você tiver acesso. Se não estiver, reclame.*

Escolha o que lhe parecer mais fácil de usar.

Se você tiver acesso a uma estação LinuX *digite o seguinte programa no arquivo denominado*[3] *"integral.calc"*

```
soma = 0.
for (n=10; n<= 100; n++)
{
for (k=1; k<=n; k++)
{
soma = soma + k*k;
}
soma = soma/(n*n*n);
printf("%f/n", soma);
}
```

e depois, numa área de trabalho*, e no mesmo diretório em que estiver o arquivo "*`integral.calc`*", digite:*

`calc < integral.calc`

e você vai ver aparecer, ante os seus olhos, uma lista de números o ultimo sendo

.33835033840119226453.

Se você trocar, na segunda linha,

$$(n = 10; n <= 100; n++)$$

por

$$(n = 10; n <= 1000; n++)$$

[3]Um programa em $\mathcal{C}$.

você poderá observar os primeiros algarismos se "acomodando" aos poucos[4] *em cima de* 3 *porque "a tendência", ou o comportamento assintótico deste "processo", consiste em que todos os algarismos se tornem* 3*, quer dizer*

$$\int_0^1 x^2 \approx 0.333333333333333333$$

ou

$$\int_0^1 x^2 = \frac{1}{3}$$

e observe que na segunda equação escrevemos "=" e não "≈".

No exemplo, dissemos que a *partição* do intervalo $[a, b]$ pode ser feita de muitas maneiras. Usamos uma maneira em que os sub-intervalos todos tem mesma medida. Quando se faz assim, se diz que a *partição* é uniforme. Este é um caso particular de particionamento de intervalos, quando fazemos demonstrações usamos um formato mais geral que não discutiremos neste livro.

Exercícios: 23 *Sucessões de somas de Riemann*

1. *Escreva uma sucessão de somas de Riemann, associadas a partições uniformes do intervalo* $[0, 1]$ *para cada uma das funções abaixo e deduza uma lei.*
   - (a) *funções constantes.*
   - (b) $f(x) = x$
   - (c) $f(x) = x^n$; $n \leq 2$.
2. *Escreva uma sucessão de somas de Riemann, associadas a partições uniformes do intervalo* $[0, a]$ *para cada uma das funções abaixo e deduza uma lei.*
   - (a) *funções constantes.*
   - (b) $f(x) = x$
   - (c) $f(x) = x^n$; $n \leq 2$.

3.6 Funções definidas por uma integral.

Podemos, com auxílio da integral, definir novas funções se deixarmos um dos limites de integração "*livre*".

Considere uma função f integrável em um intervalo I da reta. Podemos definir a nova função com a seguinte fórmula:

[4]Se não funcionar é porque a *estação LinuX* não tem "calc" instalado, ele é gratuito, peça que o instalem

Definição: 10 *Função definida via integral*

$$F(x) = \int_a^x f(t)$$

em que $a, x \in I$.

Definição: 11 *Primitiva de uma função integrável*
Se f for integrável em um intervalo I da reta, então a função

$$F(x) = \int_a^x f; \ ; a, x \in I$$

se chama primitiva *de f com valor inicial a.*

Outras propriedades das primitivas serão estudadas mais a frente junto com as propriedades da derivação. Aqui veremos as mais simples e imediatas.

3.6.1 Algumas primitivas

Exercícios: 24 *Funções definidas via integral*

1. *função definida via integral.* *Defina uma nova função, a partir de $f(t) = t + 3$ da seguinte forma:*

$$F(x) = \int_0^x f;$$

   (a) *Calcule F(0);*
   (b) *Calcule F(1)*
   (c) *Calcule F(-2)*
   (d) *Calcule F(-3)*
   (e) *Encontre a fórmula algébrica de $y = F(x)$.*

2. *Primitivas* *Calcule as primitivas com o valor inicial a indicado, para as seguintes funções:*

função	*valor inicial*	*função*	*valor inicial*
a) $f(x) = 3$	$a = 0$	*b)* $f(x) = 3$	$a = -3$
c) $f(x) = 3$	$a = 3$	*d)* $f(x) = 1$	$a = -3$
e) $f(x) = x$	$a = 0$	*f)* $f(x) = x$	$a = 3$
g) $f(x) = x$	$a = -3$	*h)* $f(x) = x$	$a = 1$
i) $f(x) = x^2$	$a = 0$	*j)* $f(x) = x^2$	$a = 3$
l) $f(x) = x^2$	$a = -3$	*k)* $f(x) = x^2$	$a = 1$

3.6.2 Construção gráfica de primitivas

Descobrir uma primitiva F de uma função dada, é uma tarefa muito difícil, inclusive com possibilidades muito grandes de resultados negativos: simplesmente, há integrais que não sabemos calcular.
Mesmo aquelas que sabemos, o sabemos por uma herança que devemos guardar com carinho dos que nos antecederam na construção da ciência que temos. Foram "descobertas"casuais de quem muito estudou. Nós vamos, nos exercícios desta seção, descobrir algumas primitivas com auxílio de gráficos. Muitos destes cálculos serão retomados mais a frente com outros métodos, usando a derivada. Um programa de computador, ao final desta seção, lhe permitira visualizar a construção feita.

Exercícios: 25 *Primitivas de algumas funções*

1. *O significado dos coeficientes na reta* Objetivo do exercício: identificar o significado dos coeficientes na função do primeiro grau ao calcularem-se primitivas.

   (a) *Considere $f(t) = at$. De um valor positivo para a e calcule*

$$F(x) = \int_0^x f$$

   Altere o sinal de a e verifique que existe uma relação entre o sinal de a e o posicionamento da parábola $y = F(x)$. Estabeleça uma regra.

   (b) *Observe que na questão anterior, independente do valor de a, F tem apenas uma raiz. Qual?*

   (c) *Calcule agora a primitiva*

$$F(x) = \int_c^x f \ ; \ c \neq 0 \ ;$$

   verificando agora que F tem duas raizes, quais?

   (d) *Considere agora $f(x) = ax + b$ e calcule a equação da primitiva*

$$F(x) = \int_{-\frac{b}{a}}^x f.$$

   Quantas raizes tem f ?

   (e) *Verifique quantas raizes tem*

$$F(x) = \int_c^x f \ ; \ c \neq \frac{-b}{a}$$

   analisando os "dois casos" que se pode escolher para c.

(f) *Escreva uma* Teoria Geral *das primitivas para as funções do primeiro grau.*

2. *Verifique que na região em que $f(t) > 0$ então*

$$F(x) = \int_{\alpha}^{x} f$$

cresce. Observe que não interessa o valor inicial α para este fato.

3. *Verifique que*

$$F(x) = b + \int_{a}^{x} f$$

passa no ponto (a, b) Este ponto *é chamado de* `condição inicial`.

4. <u>*condição inicial*</u> *Para cada uma das funções abaixo e condição inicial dada, encontre a correspondente primitiva:*

f cond. inicial	f cond. inicial	f cond. inicial
a)$y = x + 3$; $(0, 1)$	b) $y = x + 3$; $(1, 1)$	c)$y = x + 3$; $(1, -1)$
d)$y = x - 3$; $(0, 1)$	e) $y = x - 33$; $(1, 1)$	f)$y = x - 3$; $(1, -1)$
g)$y = 2x + 3$; $(0, 1)$	h) $y = 2x + 3$; $(1, 1)$	i)$y = 2x + 3$; $(1, -1)$
j)$y = -2x + 3$; $(0, 1)$	k) $y = 2x - 3$; $(1, 1)$	l)$y = -2x - 3$; $(1, -1)$

5. <u>*Problema inverso*</u>

   (a) *Faça o gráfico de $F(x) = 2x + 5$ e deduza, analisando onde F cresce ou decresce, uma função f de quem F é primitiva.*

   (b) *Faça o gráfico de $F(x) = 2x - 5$ e deduza, analisando onde F cresce ou decresce, uma função f de quem F é primitiva.*

   (c) *Deduza, do experimento feito, uma Lei Geral se referindo a unicidade das primtivas (existência ou inexistência da unicidade).*

6. <u>*Problema inverso*</u>

   (a) *Faça o gráfico de $F(x) = 2x^2 + 5x + 1$ e deduza, analisando onde F cresce ou decresce, uma função f de quem F é primitiva.*

   (b) *Faça o gráfico de $F(x) = 2x - 5$ e deduza, analisando onde F cresce ou decresce, uma função f de quem F é primitiva.*

   (c) *Formule, a partir dos experimentos feitos, uma Lei Geral se referindo a unicidade das primtivas na presença de uma* condição inicial.

7. <u>*Primitiva da função do segundo grau*</u>

   (a) *Prove que se $f(x) = ax^2 + bx + c$ então*

   $$F(x) = \int_{\alpha}^{x} f = a\int_{\alpha}^{x} t^2 + b\int_{\alpha}^{x} t + c\int_{\alpha}^{x} 1.$$

   (b) *Prove que F é uma função polinomial do terceiro grau.*

8. *Admita que que o gráfico das funções sen, cos correspondem ao que lhes é atribuido na figura (fig. 3.3), (fig. 3.4) nas páginas 116, 117.*

   (a) *Verifique geometricamente que a integral de duas "bolhas sucessivas" é zero.*

   (b) *Admita que a área de qualquer bolha é 2.*

   Observação: 13 *Verifique que $\int_{0}^{\pi} sen = 2$*

   Você pode verificar que a integral de uma "bolha" é 2, numéricamente, usando o programa `integral.py` *modificado.*

   Veja o arquivo `integral_sen.py`*, observe na definição de "seno(x)" onde está a linha:*

   ``from math import sin''

   sem a qual o programa não entenderia a linha seguinte:

   ``return sin(x)''.

   Alterando a última linha

   ``print integral(seno, 0, pi)'',

   grave o arquivo e depois digite

   `python integral_sen.py`

   e você vai ver na tela 1.99999998941 *que é a* aproximação de 2 *correspondente ao valor que deltax tem no programa.*

   i. *Verifique que $sen(x) = \int_{0}^{x} cos$.*

   ii. *Verifique que $cos(x) = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} sen$. Observe o sinal na integral e* `valor inicial`.

9. *Verifique que a função do terceiro grau, (fig. 3.7) página 120, é a primitiva da função do segundo grau (fig. 3.6) página 119. E que a função do segundo grau é a integral da função do primeiro grau, (fig. 3.5) página 118.*

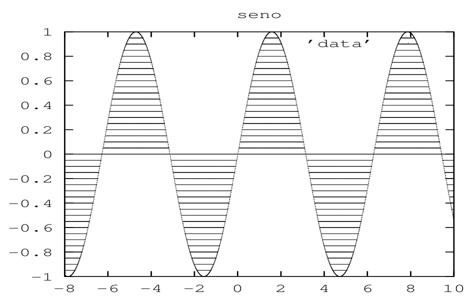

Figura 3.3: Gráfico da função $y = sen(x)$

3.6.3 A função logaritmo

A função seguinte tem um nome:

Definição: 12 *Logaritmo natural.*

$$Ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} \ ; \ x > 0.$$

É muito possível que você conheça o nome desta função e sua definição com o uso de outros métodos.

Nós vamos usar o método da integral para definí-la

Você verá mais a frente, quando voltarmos a estudar de forma mais aprofundada as propriedades do logaritmo, que as duas definições conïcidem. Veja o par de figuras (fig. 3.9), página 122 e (fig. 3.8), página 121 para acompanhar o significado da definição e das propriedades do logaritmo que vamos estudar aqui.

Exercícios: 26 *O logaritmo natural*

1. *Função logaritmo natural*

   Seja $F(x) = \int_1^x f(t)$ *com* $f(t) = \frac{1}{t}$*. Prove que o domínio desta função é* $\mathbf{R}^{++}$*, o conjunto dos números reais estritamente positivos.*

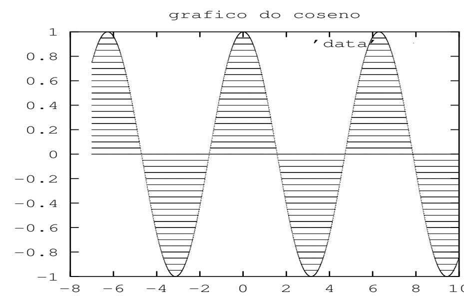

Figura 3.4: Gráfico da função $y = cos(x)$

2. *Escreva uma soma de Riemann uniforme para* $f(x) = \frac{1}{x}$ *no intervalo* $[a, b]$; $a, b > 0$. *Prove, com auxílio da soma de Riemann, que*

$$\int_a^b \frac{1}{t} = \int_1^{b/a} \frac{1}{t} = \int_{a/b}^1 \frac{1}{t}.$$

3. *Verifique que esta propriedade, é típica da função* $f(t) = \frac{1}{t}$.

4. *Deduza que* $F(ab) = \int_1^{ab} \frac{1}{t} = \int_1^a \frac{1}{t} + \int_1^b \frac{1}{t} = F(a) + F(b)$. *Isto é,* $F(ab) = F(a) + F(b)$. *A função*

$$F(x) \int_1^x \frac{1}{t} \ ; \ x > 0$$

   transforma "produto"em "soma".

5. *A função logaritmo natural Verifique que se*

$$log(x) = \int_1^x \frac{1}{t} \ ; \ x > 0.$$

   então log tem as seguintes propriedades:

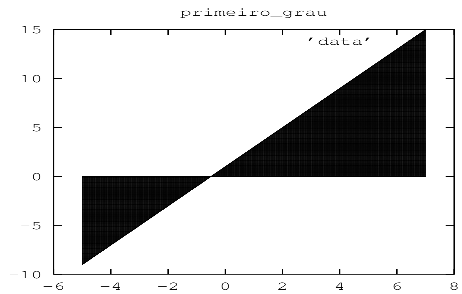

Figura 3.5: Gráfico de um polinômio do primeiro grau

(a) $x > 1 \;\; \Rightarrow \;\; log(x) > 0$

(b) $log(1) = 0$.

(c) $x \in (0, 1) \;\; \Rightarrow \;\; log(x) < 0$.

6. *A função logaritmo natural Verifique geometricamente as propriedades seguintes:*

   (a) Mostre que a curva $graf(\frac{1}{x})$ *é simétrica em torno da reta* $y = x$.

   (b) Deduza disto que o coeficiente angular instantâneo do $graf(\frac{1}{x})$ *no ponto* $(1, 1)$ *é 1.*

   (c) Mostre que $log(2) < \frac{1}{2}$, *sugestão, prove que existe um triângulo de área* $\frac{1}{2}$ *contido na região identificada pelo símgolo* $\int_1^2 \frac{1}{t}$.

Observação: 14 *Assuntos de Museu*

Os logaritmos foram a máquina de calcular dos nossos antepassados.

Esta propriedade, transformar produtos em soma *foi uma propriedade fundamental, séculos atrás, permitindo construir uma das* primeiras máquinas de calcular lógico-algébrica *de que a Humanidade tem registro.*

O logaritmos foram descoberto possivelmente por John Napier ao final século 14.

Há outras, como o "triângulo de Pascal"que os chineses conheceriam milhares de anos antes de Pascal.

O nome que se deu à função F, que transforma "produtos" em "somas", foi `logaritmo`.

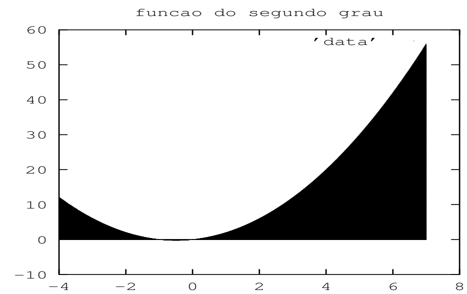

Figura 3.6: Gráfico de uma função do segundo grau

O método que se usou para descobrir esta função foi o da propriedade aditiva das potências relativamente à multiplicação de potências de mesma base:

$$a^x a^y = a^{x+y}.$$

Veja uma pequena tabela de "logarimos decimais"que, (faça uma busca no índice remissivo, procure "tabela"), e pratique um pouco um cálculo que foi importante até a metade do século 20, quando aos poucos as "máquinas elétricas"destronaram o logaritmo depois de quase seiscentos anos de reinado absoluto.

Os museus *são locais sagrados em que a nossa cultura, assim a cultura que nossos antepassados nos legaram, está guardada e é permanente posto em ligação com o presente nas mãos de pessoal especializado.*

Não fosse a cegueira de uma classe dominante esdrúxula e ignorante, os museus estaria bem conservados e bem mantidos para exercer o seu papel complementar junto à escolaridade regular.

Há muitos assuntos da escolaridade regular que devem seguidamente passar para as prateleiras e estantes dos museus e inclusive alguns devem ir lá ser buscados para justificar alguns fatos do presente.

Parte do que a Escola ainda faz com os logaritmos é assunto de museu. Hoje ainda tem gente que pensa que logaritmos servem para fazer contas... e ainda tem escolas que repassam esta idéia atrazada e ridícula para os alunos.

Sim, é uma idéia ridícula fora do seu contexto adequado. Logaritmo como "maquina de calcular"é item de Museu.

E os Museus são coisa séria.

Ao mesmo tempo, as Escolas devem ir aos Museus para que os alunos tomem conhecimento dos passos sofridos com que a Humanidade construiu o conhecimento que dominamos hoje.

Agora, Escola não é Museu! embora alguns até desejem que o assunto "escola"vire tópico de Museu, para possivelmente queimar os Museus, as Escolas e a História, tudo de uma só vez.

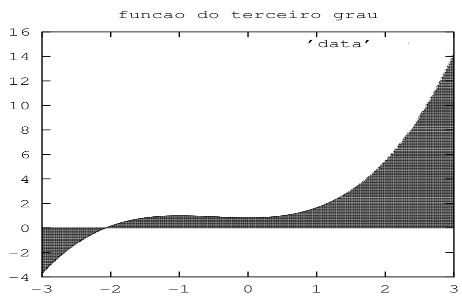

Figura 3.7: Gráfico de uma função do terceiro grau

Mas os logaritmos adquiriram outra função muito importante, sobretudo o logaritmo natural, porque a função $f(t) = \frac{1}{t}$ *está envolvida com diversos fenômenos críticos, como radiatividade. Daremos exemplos disto no capítulo em que a integração e a derivação serão estudos em conjunto. Ver "logaritmo"no índice remissivo.*

3.7 Valor médio.

Nesta seção vamos generalizar, usando a integral

$$I = \int_a^b f,$$

um resultado conhecido que fornece a área de um trapésio. Um trpésio é um tronco de triângulo obtido pelo corte de um triângulo por uma reta paralela à base.

Como consequência desta contrução podemos encontrar uma base média de modo que a área será"base média vezes altura". Isto pode ser também interpretado como sendo "alura média vezes a base". Vamos considerar esta segunda interpretação e o resultado onde desejamos chegar é que o valor de uma integral pode ser obtido usando-se uma altura média (valor médio de f) vezes a base $(b-a)$.

$$I = \int_a^b f = Val\_Med(f)(b-a)$$

Entre as utilizações dos cálculos que vamos fazer aqui se encontra o próprio valor médio de uma função.

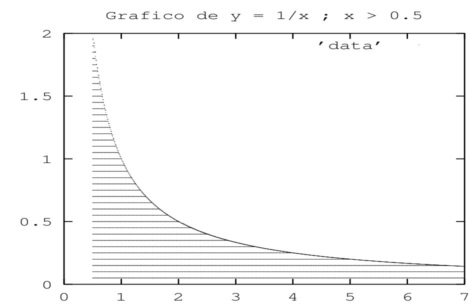

Figura 3.8: Gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$; $x > 0$

Exercícios: 27 *Valor médio de uma função*

1. *Um móvel parte do repouso e, com velocidade constante de 50Km/h, (suponha que isto seja possível), trafega por 1 h.*
   - (a) *Trace o gráfico da velocidade contra tempo:* $y = v(t)$.
   - (b) *Trace o gráfico da distância contra tempo:* $y = s(t)$.
   - (c) *Interprete a integral* $\int_0^{1h} v(t)dt$.
   - (d) *Interprete a expressão* $\frac{1}{1h}\int_0^{1h} s(t)dt$.
2. *Uma pedra é arremessada com velocidade* v_o *ao longo de uma direçào que faz ângulo de* 45^o *com a horizontal. Pela segunda lei de Newton, ela cai por terra alguns metros mais a frente e para em seguida devido ao atrito com o solo. Simule, graficamente, sem grandes detalhes, considere* $\underline{a}$ *o valor do tempo em que a pedra parou:*
   - (a) *O gráfico da velocidade contra tempo:* $y = v(t)$.
   - (b) *O gráfico da distância contra tempo:* $y = s(t)$.
   - (c) *Interprete a integral* $\int_0^{a} v(t)dt$.

Figura 3.9: Gráfico da função logaritmo natural

(d) *Interprete a expressão* $\frac{1}{1h}\int\limits_0^a s(t)dt$.

3. *Escreva uma soma de Riemann para a expressão*

$$\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(t)$$

sob a hipótese de que a integral existe.

4. <u>*média aritmética ponderada*</u> *Sob a hipótese de que* $\int\limits_a^b f$ *exista, escreva uma soma de Riemann para a expressão*

$$M = \frac{1}{t_1 - t_2}\int\limits_{t_0}^{t_1} f(t)dt t_1, t_2 \in [a, b]$$

e prove que M *é da forma*

$$M = \sum_{k=1}^{n} p_i f(x_i) \; ; \; \sum_{k=1}^{n} p_i = 1$$

"uma"média aritmética ponderada de uma "amostragem dos valores de f *no intervalo* $[t_1, t_2]$.

5. *Enuncie um teorema relativamente a expressão* $\frac{1}{b-1}\int\limits_a^b f$.

6. *Verifique que o valor da integral*

$$\frac{1}{t_1 - t_2}\int\limits_{t_0}^{t_1} f(t)dt$$

não está definida se f *for a função definida por*

$$f(x) = 1 \;\Rightarrow\; x > 0$$
$$f(x) = 0 \;\Rightarrow\; x \leq 0$$
$$com\ t_0 < 0 < t_1.$$

Escolha alguns valores para t_0, t_1. *Justifique "porque".*

Observação: 15 *Média aritmética ponderada*

A "comum"média aritmética, que se escreve

$$M = Média\ aritmética\ de\ a,b = \frac{a+b}{2}$$

também se poderia escrever

$$M = \frac{1}{2}\ a + \frac{1}{2}b$$

salientando que os números $\underline{a}$ *e* $\underline{b}$ *estão sendo multiplicados pelos pesos* $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$. *Claro, pesos iguais.*

Vemos assim que a média aritmética nada mais é que um caso particular da média artimética ponderada *quando os pesos são iguais.*

A média ponderada é um caso mais geral de média que se descreve assim:

Definição: 13 *Média ponderada*

Dados n *números* $p_1, \cdots, p_n$ *e* n *valores dados* $a_1, \cdots, a_n$, *podemos calcular a média aritmética ponderada destes valores com a expressão:*

$$\frac{p_1 a_1 + \cdots + p_n a_n}{p_1 + \cdots + p_n}.$$

Os números $p_1, \cdots, p_n$ *chamam-se pesos.*

Existe uma outra definição de "peso"que é a seguinte:

Definição: 14 *pesos*

n *números* $p_1, \cdots, p_n$ *são chamados* `pesos` *se forem positivos e* $p_1 + \cdots + p_n = 1$.

Um exercício de aritmética consiste em mostrar que esta definição pode ser escrita assim:

$\boxed{\textbf{Teorema:}}$ *4 Média aritmética ponderada*

Dados n pesos $p_1, \cdots, p_n$, a média aritmética ponderada dos números $a_1, \cdots, a_n$ relativamente a estes pesos é

$$M = p_1 a_1 + \cdots + p_n a_n$$

Obviamente, as médias aritméticas ponderadas podem ser chamadas de médias aritméticas viciadas *por uma coleção escolhida de pesos. O adjetivo "viciada"pode ser tomado no sentido que você bem desejar...*

3.7.1 Funcão contínua

Este assunto será estudado em capítulo mais a frente. Aqui vamos fazer uso do conceito de forma intuitiva.

A função definida pelo par de condições

$$\begin{array}{l} f(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad x > 0 \\ f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x \leq 0 \end{array}$$

dá um salto na origem. É esta a impossibilidade que se encontra mencionada em exercício sobre velocidade. Se interpretarmos f como a velocidade de um corpo, para $x < 0$a velocidade é nula, portanto o corpo está em repouso. De repente, para $x > 0$ a velocidade do corpo é1. Houve um salto de velocidade[5]. As funções que "dão saltos"são chamadas "descontínuas"e, contrariamente, as "funções que não dão saltos"são chamadas "contínuas".

A razão porque

$$\frac{1}{t_1 - t_2} \int\limits_{t_0}^{t_1} f(t)dt$$

não está definida se f for a função definida por

$$\begin{array}{l} f(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad x > 0 \\ f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x \leq 0 \\ \text{com } t_0 < 0 < t_1. \end{array}$$

é porque f não é contínua no ponto 0 e esta integral representa o valor médio no intervalo $[t_0, t_1] \ni 0$.

Foi isto que suas experiências detectaram, os valores da integral dependem dos extremos de integração.

Em particular se $t_0 = -t_1$ o valor da integral será $\frac{1}{2}$.

Nós podemos definir função contínua a partir destes fatos:

Definição: 15 *Função contínua*

Uma função $[a, b] \overset{f}{rightarrow} \mathbf{R}$ é contínua se para quaisquer subtintervalo $[t_0, t_1] \subseteq [a, b]$ o valor

Exercícios: 28 *Valor médio e continuidade*

1. *Verifique que a expressão*

$$\frac{1}{t_1 - t_2} \int\limits_{t_0}^{t_1} f(t)dt$$

está definida para as funções polinomiais em qualquer intervalo.

2. *Verifique que a expressão*

$$\frac{1}{t_1 - t_2} \int\limits_{t_0}^{t_1} f(t)dt$$

está definida para a função módulo, mas depende dos valores dos extremos da integral. Verifique o que acontece se $t_1 < 0 < t_2$; $|t_1| = 2|t_2|$. Depois verifique o acontece se $t_1 < 0 < t_2$; $2|t_1| = |t_2|$.

3. *Interprete os resultados anteriores sob a luz da afirmação seguinte:* a integral representa o valor médio da função no ponto 0.

4. *O que seria* valor médio instantâneo*?*

5. *Calcule o valor* valor médio instantâneo *da função*

Definição: 16 *Taxa de variação média.*

A taxa de variação instantânea de f, se houver, é dada por

$$\lim_{x=a} \frac{1}{2\epsilon} \int\limits_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} f(t).$$

Se $F(t) = \int\limits_a^x f(t)$ então a taxa de variação instantânea de F no ponto $s, x \in [a, b]$ será$f(s)$. f é chamada de derivada de F.

[5]Segundo o químico francês, Lavoisier, Natura non facit saltus, ou sua correção, moderna, Natura facit saltus, sed minusculus, com a química quântica.

Capítulo 4

Limite, continuidade e derivada

Derivação e Limite.
Esta capítulo introduz a "definição formal" de derivada que exige o conceito de *limite*.
Você aos poucos vai entender que a derivada, como é usada no Cálculo, é uma especialização da *continuidade*, então este capítulo vai apresentar a continuidade como antecedente da derivada e assim vamos dividir o trabalho nas seguintes etapas:

- Motivação para o estudo do limite.
- Limite de sucessões.
- O operador "limite" aplicado em funções.
- Definição de derivada e de continuidade.
- Técnicas de derivação.

4.1 A continuidade

Continuidade é um dos conceitos mais intuitivos do Cálculo, mas um dos menos *aplicáveis* a curto prazo, até mesmo porque os primeiros exemplos de funções descontínuas, que podem ser apresentados de forma natural, só irão surgir em situações mais avançadas.Quer dizer, a *continuidade* é tão *natural* que do ponto de vista pedagógico fica difícil introduzir o conceito: "*como tudo é contínuo, para que discutir continuidade ?*"

Intuitivamente a *continuidade* de uma função numérica f é a propriedade garantindo que

$$f(a+\Delta x) \approx f(a) \text{ se } \Delta x \text{ for "pequeno".}$$
$$f(a+\Delta x) - f(a) \approx 0 \text{ se } \Delta x \text{ for "pequeno".}$$

Esta *linguagem intuitiva* é de uso técnico nulo, não dá para fazer um programa de computador usando esta definição. Vamos transformar esta frase em símbolos, uma expressão simbólica, que poderá então se inserida num programa de computação, por exemplo.

Posto em termos de sucessões, quer dizer que a imagem de uma sucessão que defina x, define $f(x)$, ou ainda "*as funções contínuas preservam a convergência das sucessões*".

Definição: 17 *Função contínua f.*

A função f é contínua no intervalo (a, b) se qualquer sucessão $\underline{s}$ que defina $x \in (a, b)$, $f(s)$ define o número $f(x)$:

$$\forall\ s\ (lim(s) = x \ \Rightarrow\ lim(f(s)) = f(x))$$

Veja a semelhança com o conceito intuitivo inicial: "se s_n estiver próximo de x então $f(s_n)$ estará próximo de $f(x)$.

Esta definição é caracterizada como *continuidade seqüencial* porque há espaços em que ela é insuficiente[1].

A *continuidade* ainda significa, geometricamente, que se

$$(a, b) \xrightarrow{f} \mathbf{R}$$

for contínua então f não dá saltos em nenhum ponto do intervalo (a, b). Se f der um salto em algum ponto de intervalo (a, b), diremos, pelo contrário, que f é descontínua neste domínio.

Vamos começar os exercícios exatamente pela análise da descontinuidade.

Na figura (fig. 4.1), página 128 você pode ver o gráfico da função

$$f = \chi_{(a,b)}.$$

chamada *função característica* do intervalo (a, b).

As funções características tem diversos usos

- aparecem dentro das somas de Riemann para permitir uma aproximação da integral;
- Servem como modelo teórico dos *sinais* que são as unidades energéticas do nosso sistema de comunicações;
- São os *átomos* de qualquer sistema de discretização de dados, em particular no caso dos *sinais*;
- Para finalizar, são o alfabeto da nossa teoria da informação, "aquilo que o código Morse foi, elas são hoje". E são "descontínuas"em geral...

4.2 Exemplos de descontinuidade.

Exercícios: 29 *Descontinuidade*

1. *a função característica* *Considere um intervalo $[a, b]$ e defina a função* $\chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [a, b] \\ 0 & x \notin [a, b] \end{cases}$; $\mathbf{R} \xrightarrow{\chi_{[a,b]}} \mathbf{R}$ *Ver (fig. 4.1), página 128.*
   (a) *Faça o gráfico de*
   $$\chi_{[0,1]}, \chi_{[-1,1]}, \chi_{[0,10)}.$$
   (b) *Faça o gráfico de $\chi_{[a,b]}$ para alguns valores a, b escolhidos por você. Verifique em que pontos $\chi_{[a,b]}$ é descontínua.*
   (c) *Faça o gráfico de*
   - $f = \chi_{[0,1]} + \chi_{[1,2]} + \chi_{[3,4]}$,
   - $g = \chi_{[-1,1]} + \chi_{[-2,2]} + \chi_{[-3,3]}$,
   - $h = \chi_{[0,10)} + \chi_{[0,20]}$.

[1] a continuidade é definida genericamente por uma topologia, que é um tipo de estrutura matemática, em algumas topologias preservar convergência é insuficiente para se ter continuidade. No Cálculo isto não ocorre entretanto.

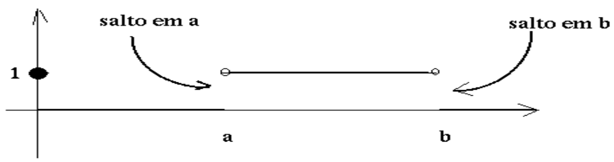

Figura 4.1: Função característica de (a, b).

e encontre os pontos de descontinuidade de cada uma das funções f, g, h.

(d) *Faça o gráfico de*

$$f = \chi_{[0,20]} + \chi_{[5,15]} + \chi_{[10,13]} + \chi_{[11,12]}$$

E determine os pontos de descontinuidade de f.

(e) *Faça o gráfico de*

$$f = \chi_{[0,20]} - \chi_{[3,7]} - \chi_{[4,5]} + \chi_{[10,15]} + \chi_{[12,14]}.$$

Em que subconjunto do domínio f *é contínua?*

(f) *Conjunto em que* $\chi_{[a,b]}$ *é contínua*

- *Verifique que se uma sucessão ac crescer para* $\underline{a}$ *então* $\chi_{[a,b]}(ac)$ *representa* 0.
- *Verifique que se uma sucessão ad decrescer para a então* $\chi_{[a,b]}(ad)$ *representa* 1.
- *A função característica* $\chi_{[a,b]}$ *não preserva a convergência das sucessões em exatamente dois pontos, quais? Determine o subconjunto* $\Omega \subset \mathbf{R}$ *em que ela é contínua, por uma restrição "conveniente" de sua definição. Dizemos impropriamente que a função foi tornada contínua. Observe que* f *está definida em* $\mathbf{R}$.
- *Justifique por que, nos extremos do intervalo* $[a, b]$, *a função característica* $f = \chi_{[a,b]}$ *deixa indefinidos os valores* $f(a), f(b)$. *Deixa de preservar convergência.*

(g) *função característica de intervalo aberto Faça os gráficos de*

$$\chi_{(0,1]} \ ; \ \chi_{[-1,1)} \ ; \ \chi_{(0,10)}.$$

(h) *função característica de intervalo aberto Considere* $\chi_{(a,b)}$ *a função característica do intervalo aberto* (a, b).

- *Se a sucessão ac crescer para* $\underline{a}$, *qual é o número que a sucessão* $\chi_{(a,b)}(ac)$ *representa ?*
- *Se a sucessão ad decrescer para* $\underline{a}$, *qual é o número que a sucessão* $\chi_{(a,b)}(ad)$ *representa ?*
- *Observe que o resultado coïncide com o do exercício em que usamos* $\chi_{[a,b]}$, *por que?*
- *A função característica* $\chi_{(a,b)}$ *não preserva a convergência das sucessões em exatamente dois pontos, quais? Determine o conjunto* $\Omega \subset \mathbf{R}$ *em que ela é contínua, por uma restrição "conveniente" de sua definição. Observe que* $\chi_{(a,b)}$ *está definida em* $\mathbf{R}$.
- *Justifique por que, nos extremos do intervalo* (a, b), *a função característica* $f = \chi_{(a,b)}$ *deixa indefinidos os valores* $f(a), f(b)$.

2. *exemplo de função contínua. Mostre que a função identidade,* $f(x) = x$ *preserva a convergência de qualquer sucessão, logo ela é contínua.*

3. *Faça o gráfico de* $h(x) = x + \chi_{[-1,1]}$. *Mostre que* h *não é contínua, (em que pontos?).*

4. *Um teorema sobre continuidade*

(a) *Mostre que se* $f(x) = x$ *então* $f + \chi_{[a,b]}$ *será descontínua em* $\{a, b\}$. *Justifique por que deixa de preservar convergência nestes dois pontos.*

(b) *Mostre que se* $f(x) = x^2$ *então* $f + \chi_{[a,b]}$ *será descontínua em qualquer conjunto que contenha* $\{a, b\}$. *Verifique também que* $f + g$ *será contínua em conjunto contido no complementar de* $\{a, b\}$.

(c) *As duas questões anteriores sugerem um teorema cuja redação poderia ser* "a soma de uma função contínua com outra que não seja contínua produz uma função ..." . *Redija o teorema e faça sua demonstração.*

5. *estoque de funções contínuas.*

(a) • *Mostre, formalmente, que uma função constante*

$$\forall \ x \ f(x) = c$$

é uma função contínua.

- *Descreva com a conceituação intuitiva "dar salto" a continuidade das funções constantes.*
- *Mostre que $f(x) = x + c$ é contínua.*

(b) *soma de funções.*

- *Mostre que a soma de duas funções contínuas, é uma função contínua:*

$$\text{Se } f, g \text{ forem contínuas} \quad \Rightarrow \quad f + g \text{ é contínua.}$$

- *Mostre que $f(x) = x + x = 2x$ é contínua.*
- *Mostre que $f(x) = 2x + x = 3x$ é contínua.*
- *Mostre que $f(x) = 2x + c$ é contínua.*

(c) *produto de funções.*

- *Mostre que o produto de duas funções contínuas, é uma função contínua.*
- *Em particular, (por que), mostre se que f for contínua e α um número, (uma constante), então, αf é contínua.*
- *Mostre que os polinômios do primeiro grau são funções contínuas.*

6. *Montando uma função descontínua*

- *Mostre que a função $f(x) = \frac{1}{x}$ definida em $\mathbf{R} - \{0\}$ é contínua.*
- *Verifique que se $f(x) = \frac{1}{x}$ estiver definida em $\mathbf{R}$ então está mal definida ...(justifique)*
- *Verifique que, se*

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x} & \Leftarrow \quad x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

então f é uma função descontínua.

7. *Mostre que a função $f(x) = \frac{1}{x}$ definida em $\mathbf{R}^{++}$, conjunto dos reais estritamente positivos, é contínua.*

8. *Mostre que a função $f(x) = \frac{1}{x}$ definida em $\mathbf{R}^{--}$, conjunto dos reais estritamente negativos, é contínua.*

Observação: 16 *Descontinuidade não é um conceito negativo*

Há funções descontínuas de grande importância, como a função $f(x) = \frac{1}{x}$, ou as funções características que representam níveis de energia constantes durante um lapso de tempo, um sinal. São dois tipos de descontinuidade. Funções como $f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = \frac{1}{x^2}$ servem para modelar a aproximação de uma fonte de alta energia, perto das quais a *lógica da energia finita* colapsa: perto do Sol, perto de um buraco negro.

Veja que o Sol não tem energia infinita, mas que a função modelo $f(x) = \frac{1}{x^2}$ diz que sim. Os modelos são aproximação da realidade e precisamos de sua expressão algébrica para usá-las em programas de computação, ou até mesmo numa apresentação oral, em um congresso.

Por exemplo, quando você passa de carro, perto de um destes mal educados que usam alto-falantes de alta potência para escutar a sua musiquinha particular, nota que, a medida com que você se afastar, rapidamente o som decresce. A dispersão sonora obedece a um modelo semelhante ao de uma função como $f(x) = \frac{1}{x}$, há que considerar a direção em que o vento "sopra" pois o som é influenciado pelas correntes de vento, som é onda mecânica.

9. *Mostre que a função*

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \ ; \ f(0) = 10;$$

é descontínua, em $\mathbf{R}$ (não preserva continuidade) no ponto $x = 0$.

10. *Mostre que se $P(x)$ for um polinômio com raízes reais, então $f(x) = \frac{1}{P(x)}$ não preserva convergência nos pontos que sejam raízes de P. Observe que, além de não preservar convergência, também f não está definida nestes pontos.*

11. *Um exemplo grotesco* *Considere f definida por*

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-2} & \Leftarrow \quad x \neq 2 \\ f(2) = 1 \end{cases} \tag{4.2}$$

- *Defina f no programa* `grafun.py` *assim:*

```
def (x):
        if (x == 2):
                return 1
        else:
                return (x * x - 3 * x + 2)/(x-2)
```

usando tabulação como está indicado.

Apague alguma outra função chamada f no arquivo, ou use outro nome para a função. Na última linha do arquivo digite:

`grafun(f)`

Depois de gravar o arquivo, rode:

``python grafun.py''.

O programa vai lhe perguntar pelos extremos do intervalo relativamente ao qual você desejar ver o gráfico e você verá que o gráfico desta função é uma reta.

- *Verifique que f é contínua.*
- *Redefina f assim:*

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-2} & \Leftarrow \quad x \neq 2 \\ f(2) = 0 \end{cases} \tag{4.3}$$

e prove que f agora é uma função descontínua. Faça o gráfico desta última função.

4.3 Motivação para o estudo de limites.

Usamos nesta seção o conceito geométrico de derivada que já foi apresentado no primeiro capítulo: se uma função f tiver derivada no ponto $\underline{x = a}$, neste ponto ela tem uma reta tangente que memoriza o coeficiente angular instâneo de f. Um exemplo bem concreto é o que ocorre com uma pedra rodando presa a um cordão, se o cordão se romper, a pedra segue na direção da tangente ao círculo naquele "ponto do tempo". A tangente memorizou o coeficiente angular instantâneo da pedra no momento em que o cordão se rompeu, ver figura 1.13 na página 22.

A maneira formal de definir *derivada* usa o conceito de *limite* que é o ponto central desta lista de exercícios.

Comecemos com uma notação, $\lim\limits_n s_n$, que se lê: *"limite, relativamente a n de s_n". O* "limite" é um operador, aplicado em uma sucessão s, para revelar o seu "comportamento assintótico", outras formas de escrever isto é

$$\lim s \;;\; \lim_n s_n \;;\; \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Nos usaremos,neste texto apenas as duas primeiras formas, e sempre que possível, a primeira, se não houver dúvida de que s é uma sucessão.

Se a sucessão tiver limite, o limite é define o *comportamento assintótico* da uma sucessão. Se a sucessão não tiver limite, ela se diz *divergente*.

O resultado desta aplicação, neste livro, é um número real e portanto este operador serve para construir os números reais a partir de sucessões de números racionais.

Os primeiros exemplos se baseiam no estudo da derivada de uma função, como *limite* do quociente de diferenças.

A definição geométrica que demos para a derivada, no capítulo 1, se opõe a um antigo hábito que consistia em definir derivadas, desde o início, usando limite. Entretanto não podemos viver sem formalismo, e a definição intuitiva tem vida curta.

Esta lista seção lida com *sucessões de números racionais*, elas têm várias utilidades, vamos enumerar algumas:

- Definem os números reais, quando forem convergentes.
- Servem para fazer testes de comportamento assintótico.
- São o instrumento para "discretizar" a quantização dos fenômenos e assim representá-los em programas de computador.

4.3.1 Comportamento assintótico.

Não queremos dar uma definição de *comportamento assintótico*, preferimos tratar este conceito como um conceito básico para o qual não se oferece uma definição. Os exercícios desta seção pretendem ilustrar o conceito do qual diremos apenas que *o comportamento assintótico de uma sucessão, é uma propriedade que pode ser identificada a partir de um índice da sucessão.* Obviamente esta frase não é uma definição adequada, mas os exercícios devem torná-la clara.

Exercícios: 30 *1. Escreva alguns termos das sucessões abaixo, e observe que* **todas** *elas tem a propriedade $|s_n| < erro$ a partir de um determinado índice, e idenfique qual é o índice, para cada uma, completando a tabela:*

$(s_n)_n$	$erro$	$n \geq$	.
$(\frac{1}{n})_n$	0.1	$n \geq$	
$(\frac{1}{n})_n$	0.01	$n \geq$	
$(\frac{1}{n})_n$	0.001	$n \geq$	
$(\frac{1}{n^2})_n$	0.1	$n \geq$	
$(\frac{1}{n^2})_n$	0.01	$n \geq$	
$(\frac{1}{n^2})_n$	0.001	$n \geq$	

$(s_n)_n$	$erro$	$n \geq$	.
$(1 - \frac{n}{n+1})_n$	0.1	$n \geq$	
$(1 - \frac{n}{n+1})_n$	0.01	$n \geq$	
$(1 - \frac{n}{n+1})_n$	0.001	$n \geq$	
$(\frac{(-1)^n}{n})_n$	0.1	$n \geq$	
$(\frac{(-1)^n}{n})_n$	0.01	$n \geq$	
$(\frac{(-1)^n}{n})_n$	0.001	$n \geq$	

Observação: 17 *Limite*

Dizemos que as sucessões acima tem `zero` *como limite, e que seu comportamento assintótico se caracteriza por* decrescer indefinidamente, em módulo, para zero.. *Se na frase acima tirarmos "em módulo" a frase ficaria falsa.*

2. *Dentre as sucessões da lista acima, determine:*
   - *descrescem para zero;*
   - *crescem para zero;*
   - *oscilam em torno de zero, mas decrescendo em módulo para zero.*

3. *Escreva alguns termos das sucessões abaixo e observe que elas tem a propriedade $|s_n - 1| < erro$ a partir de um determinado índice, e idenfique qual é o índice, para cada uma, completando a tabela:*

$(s_n)_n$	$erro$	$n \geq$	.
$(\frac{n}{n+1})_n$	0.1	$n \geq$	
$(\frac{n}{n+1})_n$	0.01	$n \geq$	
$(\frac{n}{n+1})_n$	0.001	$n \geq$	
$(\frac{(n+1)^2}{n^2})_n$	0.1	$n \geq$	
$(\frac{(n+1)^2}{n^2})_n$	0.01	$n \geq$	
$(\frac{(n+1)^2}{n^2})_n$	0.001	$n \geq$	
$(\frac{(n+3)^2}{n^2})_n$	0.01	$n \geq$	

$(s_n)_n$	$erro$	$n \geq$	.
$(\frac{n}{n+2})_n$	0.1	$n \geq$	
$(1 - \frac{n}{n+2})_n$	0.1	$n \geq$	
$(1 - \frac{n}{n+2})_n$	0.01	$n \geq$	
$(1 - \frac{n}{n+2})_n$	0.001	$n \geq$	
$(\frac{n+(-1)^n}{n})_n$	0.1	$n \geq$	
$(\frac{n+(-1)^n}{n})_n$	0.01	$n \geq$	
$(\frac{n+(-1)^n}{n})_n$	0.001	$n \geq$	

Observação: 18 *Limite*

Nos exercícios acima encontramos dois casos particulares de limite: sucessões convergindo para **<u>um</u>** *e sucessões convergindo para* **<u>zero</u>**. *Dizemos que as sucessões acima tem* `um` *como limite, e que seu comportamento assintótico se caracteriza por* se aproximar indefinidamente de 1. *Há exatamente uma excessão, (qual ? e qual é o limite neste caso?).*

Veja no gráfico (fig. 4.2) o erro 0.1 *representado por duas retas paralelas ao eixo OX que "cercam" o* limite *da sucessão, mostrando que a partir do índice 11, a sucessão permanece na faixa de largura* $2erro$.

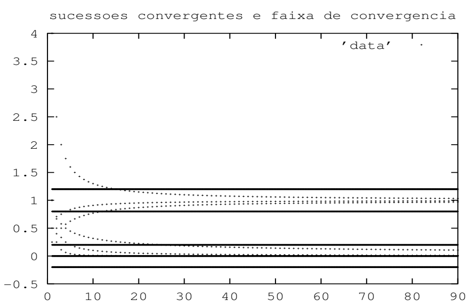

Figura 4.2: Sucessões convergentes para zero e para 1.

4. *Analise o gráfico (fig. 4.2), página 134, e calcule formalmente a partir de quando a sucessão entra na faixa de "diâmetro"* 0.2. *Discuta a terminologia "*diâmetro da faixa*". Poderiamos falar de raio da faixa? qual seria o raio neste caso.*

5. *Analise o gráfico (fig. 4.2), e calcule formalmente a partir de quando a sucessão entra na faixa de "diâmetro"* 0.1, *(ou raio* 0.05*).*

6. *Prove que as sucessões do exercício 1,* **todas**, *tem a propriedade*

$$|s_n| < \epsilon$$

a partir de um determinado índice, calcule qual é o índice, para ϵ dado, modificando a tabela.

Definição: 18 *Limite zero Quando uma sucessão* s *tem esta propriedade, dizemos que tem l*limite zero. *Em outras palavras, ainda, dizemos que s é uma representação do zero.*

7. *Prove que as sucessões do exercício 3,* **todas** *tem a propriedade*

$$|s_n - 1| < \epsilon$$

a partir de um determinado índice, calcule qual é o índice, para ϵ dado, modificando a tabela.

8. *Para cada sucessão abaixo encontre,*
   - *qual é o* limite,
   - *para o erro dado, ϵ, calcule a partir de que índice n a sucessão entra na* faixa de erro*:*

$(s_n)_n$	ϵ	*lim*	$n \geq$
$(\frac{2n}{n+1})_n$	0.1		
$(\frac{n}{3n+1})_n$	0.01		
$(\frac{2n}{4n+1})_n$	0.001		
$(\frac{2(n+1)^2}{n^2})_n$	0.1		
$(\frac{(n+1)^2}{2n^2})_n$	0.01		
$(\frac{3(n+1)^2}{2n^2})_n$	0.001		
$(\frac{2n-3}{3n+2})_n$	0.1		

$(s_n)_n$	ϵ	*lim*	$n \geq$
$(1 - \frac{5n}{3n+2})_n$	0.1		
$(1 - \frac{3n}{5n+2})_n$	0.01		
$(1 - \frac{5n}{5n+2})_n$	0.001		
$(\frac{n+(-1)^n}{n})_n$	0.1		
$(\frac{2n+(-1)^n}{3n})_n$	0.01		
$(\frac{5n+(-1)^n}{3n})_n$	0.001		
$(\frac{5n+(-1)^n}{3n})_n$	0.0001		

Podemos apresentar uma definição de limite de sucessões, agora:

Definição: 19 *Limite de uma sucessão*
Diremos que uma sucessão s tem limite L se, e somente se, para todo erro, ϵ, dado, podermos identificar um índice N tal que

$$n > N \Rightarrow |s_n - L| < \epsilon.$$

Quando uma sucessão tiver limite, *diremos que* seu comportamento assintótico *é* de convergência*, ou ainda, simplesmente, diremos que* a sucessão é convergente.

Observação: 19 *Defeito da definição de limite*
Mas esta definição tem um defeito intrínseco grave: como poderemos verificar sua validade, se não conhecermos o número L ? *Na verdade este "defeito" está associado a uma razão mais importante:* as sucessões convergentes *servem para definir os números reais. Como muitos números reais não tem uma formulação da forma $\frac{p}{q}$ torna-se impossível escrever a expressão*

$$|s_n - L| < \epsilon$$

para a grande maioria da sucessões convergentes.
Por exemplo, quando escrevermos:

$$|s_n - \sqrt{2}| < \epsilon$$

estamos apenas usando um símbolo, que poderia ser uma letra, para representar o número $\sqrt{2}$. Não seria possível colocar esta expressão, diretamente, num programa de computador...
Uma solução para este problema é o teste de Cauchy. Vamos estudar o teste de Cauchy em outra lista de exercícios, você pode encontrá-la agora usando o índice remissivo.

4.3.2 Sucessões divergentes

"Divergente" é sinônimo de "não convergente". Isto é existem sucessões cujo comportamento assintótico é o inverso de convergente. Elas não definem números reais, não tem limite. As sucessões divergentes não são inúteis, servem para fazer alguns testes.

Há dois tipos de sucessões divergentes, veja os gráficos (fig. 4.3) 136, (fig. 4.4) 137.

- divergentes limitadas;

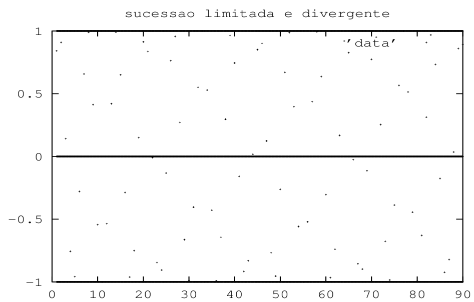

Figura 4.3: sucessão limitada e divergente

- divergentes ilimitadas.

Os exercícios desta secção tem o objetivo de exemplificar estes dois tipos de sucessões. Começaremos com o segundo tipo, mas antes vejamos algumas definições:

Definição: 20 *Cota superior*
Uma cota superior *para uma sucessão, é um número que é maior do que todos os elementos de uma sucessão.*

Veja que se K for uma cota superior, também $K + 1$ o será.

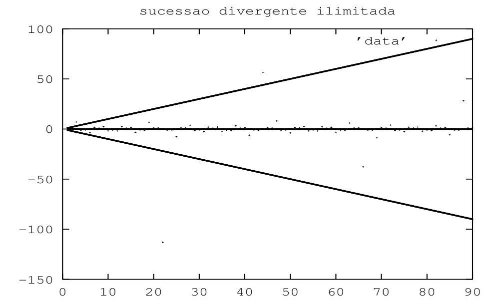

Figura 4.4: sucessão divergente

Definição: 21 *Cota inferior*
Uma cota inferior *para uma sucessão, é um número que é menor do que todos os elementos de uma sucessão.*

Veja que se K for uma cota inferior, também $K - 1$ o será.

Observação: 20 *Sucessão ilimitada*
Não existe uma cota superior *para a sucessão dos números naturais. Mas existe uma* cota inferior *que é zero. Não somente, todo número negativo é também uma cota inferior para o conjunto* $\mathbf{N}$.

Exemplo: 15 *Sucessão ilimitada*
Não existe uma cota superior *para a sucessão acima, nem mesmo uma* cota inferior*. Ela é ilimitada superior e inferiormente.*

Nos próximos exercícios vamos usar os conceitos *cota superior* e *cota inferior*.

1. Verifique que é verdade que
$$\forall K \ \exists n \in \mathbf{N} \ ; \ |s_n| > K$$
para a sucessão $s_n = (-1)^n n$
2. Verifique que, para a sucessão dos números naturais, é verdade que
$$\forall K \ \exists n \in \mathbf{N} \ ; \ n > K$$

3. Expresse em palavras, (sem símbolos), a propriedade anterior.

4. Verifique quais das sucessões abaixo é ilimitada e idenfique se *superiormente*, *inferiormente* ou ambos os casos:

$(s_n)_n$	cota superior	cota inferior
$(\frac{n^2}{n+1})_n$		
$(\frac{n}{(n+1)^2})_n$		
$(\frac{2n}{n+1})_n$		
$(\frac{(n+1)^2}{n^2})_n$		
$(\frac{(n+1)^2}{n^2+1})_n$		
$(\frac{(n^2+1)}{n^2})_n$		

5. Dê três exemplos de sucessões que sejam cotadas superiormente.

6. Dê três exemplos de sucessões que sejam cotadas inferiormente.

7. Dê três exemplos de sucessões que sejam cotadas tanto inferiormente como superiormente.

8. Dê três exemplos de sucessões que não sejam cotadas nem inferiormente e nem superiormente.

Exemplo: 16 *Números reais*
Se pode deduzir do da discussão anterior que as sucessões se dividem em dois tipos:

- *Aquelas que convergem, e consequentemente definem um número real. Estas são limitadas, necessariamente.*
- *Aquelas que não convergem, as sucessões divergentes.*
  - *divergentes limitadas;*
  - *divergentes ilimitadas.*

Assim temos uma definição de número real:

Definição: 22 *Número real*
Um número real é uma sucessão convergente.

Esta definição será refeita mais adiante, uma vez que neste momento não temos uma definição adequada de sucessão convergente.

A dificuldade do conceito de limite está ligada à própria definição de números reais que eles provêm. Na próxima lista de exercícios vamos apresentar sucessões que não convergem e que são limitadas. Como não convergem, não definem números reais.

Exercícios: 31 *Sucessões limitadas*

1. *Verifique quais das sucessões abaixo são limitadas:*

$(s_n)_n$	*cota superior*	*cota inferior*
$(\frac{n^2}{n^3+1})_n$		
$(\frac{n^3}{(n+1)^2})_n$		
$(\frac{2n^2}{n^3+1})_n$		
$(\frac{(n+1)^2}{(n+3)^2})_n$		
$(\frac{(n+1)^2}{(n+10)^2+1})_n$		
$(\frac{(n+4)^2+1}{(n+300)^2})_n$		
$(\frac{(n+A)^2+1}{(n+B)^2})_n$		
$(\frac{(n+A)^2+1}{(n+B)^3})_n$		
$(\frac{(n+A)^3+1}{(n+B)^2})_n$		
$(\frac{(n+4)^p+1}{(n+300)^q})_n$		
$(\frac{sen(n)}{(n+300)^2})_n$		
$(\frac{(n+4)^2+1}{cos(n)})_n$		

2. *Faça gráficos ilustrando cada um dos casos acima.*

3. *Observe as seguintes passagens, na transformação de uma expressão algébrica etiquetadas como*
   - *Lógica,*
   - *Aritmética.*

   Justifique a "etiqueta:.

   (a)
$$\left\{\begin{array}{cc} \frac{n^2+3n}{n^3+2n^2} & \textit{algébrica} \\ \frac{1+3/n}{n+2} & \textit{lógica} \\ \frac{1}{n+2} & \end{array}\right. \tag{4.4}$$

   (b)
$$\left\{\begin{array}{cc} \frac{n^3+An^2}{Bn^2+Cn} & \textit{algébrica} \\ \frac{n+A}{B+C/n} & \textit{lógica} \\ \frac{n+A}{B} & \textit{algébrica} \\ \frac{n}{B}+\frac{A}{B} & \textit{lógica} \\ \frac{n}{B} & \textit{lógica} \\ n & \end{array}\right. \tag{4.5}$$

4. *regra do sanduíche*

(a) *Mostre que se duas sucessões s,t forem positivas, então,* $s < t \Rightarrow \lim(s) < \lim(t)$

(b) *Considere três sucessões* s, t, r *tais que* $s < t < r$. *Prove que se* $\lim(s) = \lim(r)$ *então existe* $\lim(t)$ *e*

$$\lim(s) = \lim(t) = \lim(r).$$

Vamos resolver o último exercício.

Lembre-se de como começamos esta lista de exercícios. Queriamos estudar o *comportamento assintótico* de sucessões, e é este o sentido das passagens *algébricas* ou *lógicas* no exercício que vamos resolver.

No primeiro caso temos

- A passagem de $\frac{n^2+3n}{n^3+2n^2}$ para $\frac{1+\frac{3}{n}}{n+2}$ etiquetamos como *algébrica* porque é o resultado de uma operação algébrica legal, a divisão do númerador e do denominador pelo mesmo número n^2.

- A passagem de $\frac{1+\frac{3}{n}}{n+2}$ para $\frac{1}{n+2}$ está etiquetada como *lógica* porque as duas expressões não são algébricamente equivalentes, mas são assintóticamente equivalentes. Ambas convergem para zero:

$$\lim_n \frac{1+\frac{3}{n}}{n+2} = 0 \tag{4.6}$$

$$\lim_n \frac{1}{n+2} = 0 \tag{4.7}$$

A última passagem é lógica porque as duas sucessões representam o mesmo número real, zero.

No segundo exemplo as justificativas são as mesmas, analise as passagens à luz das considerações que fizemos no primeiro caso.

Ainda aqui se esconde o fato de que as sucessões convergentes definem os números reais e da mesma forma como temos frações equivalentes,

$$\frac{3}{4} \equiv \frac{9}{12},$$

definindo o mesmo número racional, também temos sucessões equivalentes, definindo o mesmo número real.

Quer dizer:

$$\frac{1+\frac{3}{n}}{n+2} \equiv \frac{1}{n+2} \equiv 0$$

são duas sucessões que definem o zero, o que se encontra expresso na notação

$$\lim_n \frac{1+\frac{3}{n}}{n+2} = 0 = \lim_n \frac{1}{n+2}$$

Definição: 23 *Limite*

O símbolo $\lim_n s_n = a$ *significa que a sucessão* $s = (s_n)_n$ *representa o número real* $\underline{a}$. *A grande maioria dos autores usa a notação*

$$\lim_{n\to\infty} s_n = a.$$

que significa "n crescendo indefinidamente". Como não pode ser de outra forma, simplificamos a notação.

Exercícios: 32 *Limite e números reais*

1. *Transforme com operações algébricas e lógicas e calcule o limite de*

$$\lim_n \left(\frac{n+3}{n+2} + \frac{2n+1}{n+2}\right).$$

2. *comparação de sucessões* *Prove que se* $s_n = \sum_{k=1}^{n} k$ *então* $\lim_n s_n$ *não existe.*

3. *comparação de sucessões* *Deduza do anterior que se* $t_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$ *então* $\lim_n t_n$ *não existe.*

4. *soma dos termos de uma p.g.*

   (a) *Mostre que*

   $$(1-x)(1+x+\cdots+x^n) = 1 - x^{n+1} \Leftarrow |x| < 1,$$

   e disto deduza que

   $$1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r}.$$

   (b) *Mostre a soma dos termos de uma p.g. de razão r converge apenas se para razão r tivermos* $|r| < 1$, *a razão for menor do que 1.*

   (c) *Calcule* $\lim_n (1 + r + r^2 + \cdots + r^n)$.

5. *Considere* $s_n = \frac{2n+1}{3n+4}$. *Calcule* $\lim_n f(s_n)$ *quando*

   (a) $f(x) = x^2$; (b) $f(x) = \frac{1}{x}$; (c) $f(x) = x$;
   (d) $f(x) = \frac{1}{x^2}$; (e) $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$; (f) $f(x) = \frac{x}{1+x}$;

6. *Sendo*

   $$s_n = \int_0^n f \ ; \ f(x) = 1$$

   verifique se o limite $\lim_n s_n$ *existe ou prove que ele é equivalente a uma outra sucessão cujo limite não existe.*

7. *Prove que*

$$s_n = \int_1^n \frac{1}{t} < t_n = \int_1^n 1$$

8. *Transforme com operações algébricas e lógicas e calcule o limite, cotas superior e inferior das sucessões, se existirem:*

Observação: 21 *Logaritmo*

Use a seguinte igualdade nos exercícios abaixo:

$$log(x) = \int_1^x \frac{1}{t}$$

Veja no índice remissivo "logaritmo natural" uma discussão mais alongada sobre o assunto. Considere neste exercício, a presente definição como uma fórmula que você vai manipular.

$(s_n)_n$	*cota superior*	*cota inferior*	*limite*
$(\frac{n^2}{sen(n)})_n$			
$(\frac{sen(n)}{(n+1)^2})_n$			
$(\frac{log(n)}{n^3+1})_n$			
$(\frac{(n+1)^2 log(n)}{(n+3)^2})_n$			
$(\frac{(n+1)^2}{(n+10)^2+1})_n$			

9. *geratriz de dízimas periódicas*

Considere uma dízima periódica

$$x = 0.(d_1 d_2 ... d_n)$$

quer dizer que o conjunto de n *algarismos* d_i *se repete, indefinidamente, na mesma ordem. Mostre que a geratriz é soma de uma progressão aritmética. Considere alguns casos particulares até ficar claro o método. Escreva, a partir do resultado, o algoritmo clásico para obtenção das geratrizes de uma dízima periódica qualquer.*

4.4 O teste de Cauchy

Quando apresentamos a definição de limite dissemos que ela era deficiente uma vez fazia uso do número real L para o qual possivelmente não tinhamos nenhuma formulação adequada. É caso se o limite da sucessão for um número irracional.

Veremos aqui uma forma "absoluta" de testar se uma sucessão é convergente.

As sucessões *convergentes* têm um "freio interno" que o teste de Cauchy detecta. Não ficaremos sabendo qual é o limite, apenas saberemos se são *convergentes* ou *divergentes* o que é natural. Existem várias sucessões convergentes cujo limite é $\sqrt{3}$. Veja os dois exemplos abaixo, uma converge por falta, outra converge por excesso:

Exemplo: 17 *Programa RAIZQ.py - python - LinuX*

Cálculo de $\sqrt{3}$.

==

erro = 1e-07

por falta	*por excesso*
1.73205041885	1.73205089569
1.73204803467	1.73205184937
1.73193359375	1.73205566406
1.73046875	1.732421875
1.71875	1.734375
1.5	1.75

=================

raiz do python= 1.73205080757

=================

Procure entender:

- tudo que sabemos sobre $\sqrt{3}$ é que existem sucessões convergentes que definem este número;
- em outras palavras, $\sqrt{3}$ é uma sucessão convergente.
- Se pudessemos escrever a expressão do limite usada acima para expressar a convergência de uma sucessão que defina $\sqrt{3}$ então teriamos uma expressão artimética, usando racionais, definindo este número o que entra em contradição com que ele seja irracional.
- O programa acima testa sucessivamente números que crescem ou decrescem com incrementos que vão diminuindo, até que $abs(numero * numero - 3) < erro$.
- Obviamente um programa de computador vai gerar apenas sucessões com um "número" finito de termos, (pleonástico, número somente pode ser finito...).

Os números irracionais, ou mesmo os racionais são sucessões convergentes. A diferença consiste em que podemos escrever, para o racionais, a expressão

$$n > N \quad \Rightarrow \quad |s_n - L| < \epsilon.$$

em que $L = \frac{p}{q}$, e isto não é possivel fazer com os irracionais.

4.4.1 O freio interno

Se uma sucessão $\underline{s}$ for convergente então a diferença entre dois termos sucessivos, s_n, s_{n+1}, a partir de determinado índice, tende a diminuir:

$$|s_{n+1} - s_n| < |s_{n+2} - s_{n+1}|.$$

Esta propriedade pode ter algumas excessões, mas será verdadeira em uma boa quantidade de casos. Mesmo assim é insuficiente para garantir a convergencia de s_n.

É preciso uma comparação mais forte.

Se partirmos da definição de limite, vamos obter o *freio interno* mencionado acima.

Então escrevamos

$$\forall \epsilon \; \exists N \in \mathbf{N}; n > N \quad \Rightarrow \quad |s_n - L| < \epsilon,$$

em que L é o número real definido pela sucessão s. Se tomarmos dois números naturais $n, m > N$ então

$$|s_n - L| < \epsilon, |s_m - L| < \epsilon$$

e usando a famosa *desiguldade triangular* da geometria, ver (fig. 4.5), como dois números quaisquer sempre podem ser lados de um triângulo, então

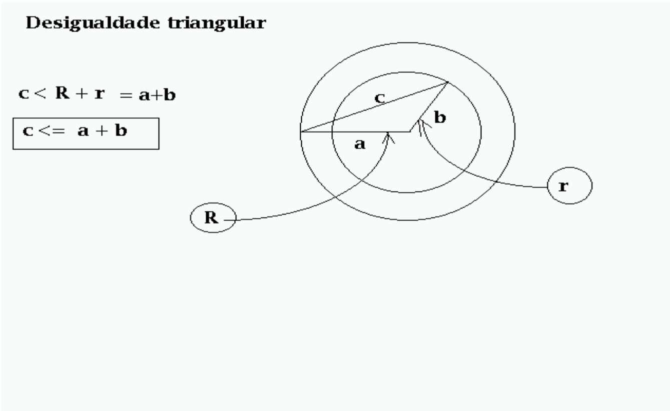

Figura 4.5: A soma de quaisquer dois lados de um triângulo é maior do que o terceiro.

$$a + b = |s_n - L| + |s_m - L| < 2\epsilon \tag{4.8}$$
$$c = |s_n - L + s_m - L| = |s_n - L + L - s_m| = |s_n - s_m| \tag{4.9}$$
$$c = |s_n - s_m| < 2\epsilon \tag{4.10}$$

e vemos assim que a diferença entre os termos de uma sucessão convergente vai se reduzindo, quaisquer dois termos para além do índice N tem diferença menor do que 2ϵ.

Isto ainda significa que, se pararmos em um índice maior do que $N, n > N$, estaremos com um valor s_n da sucessão que se encontra próximo do limite com um erro menor do que 2ϵ.

Assim, usaremos a expressão:

$$\forall\epsilon\ \exists N \in \mathbf{N}; n, m > N \quad \Rightarrow \quad |s_n - s_m| < 2\epsilon$$

como definição de sucessão convergente de números racionais.

Observação: 22 *A menor precisão* aparente *do teste de Cauchy*

O teste de Cauchy *parece ser menos preciso que a definição de limite inicial, porque garante que a diferença em módulo*

$$|s_n - s_m| < 2\epsilon,$$

com erro 2ϵ e não ϵ.

É uma deficiência apenas aparente, basta usarmos $\frac{\epsilon}{2}$ em nossos cálculos que iremos encontrar o índice N tal que

$$n, m > N \quad \Rightarrow \quad |s_n - s_m| < \epsilon.$$

Exercícios: 33 *O teste de Cauchy*

1. *Escreva a expressão do teste de Cauchy para cada uma das sucessões definidas abaixo:*

a) $s_n = \frac{n}{n+1}$	*b)* $s_n = \frac{n^2}{n+1}$	*c)* $s_n = \frac{3(n+1)^2}{2n^2}$	*d)* $s_n = n$

   e rejeite <u>*as duas*</u> *que não satisfazem ao teste.*

2. *Para $\epsilon = 0.1$ verifique qual das sucessões abaixo satisfaz à condição insuficiente do teste de Cauchy*

   $$|s_{n+1} - s_n| \le \epsilon$$

a) $s_n = \frac{n}{n+1}$	*b)* $s_n = \frac{n^2}{n+1}$	*c)* $s_n = \frac{3(n+1)^2}{2n^2}$	*d)* $s_n = n$

   e rejeite <u>*as dua*</u> *que não satisfazem ao "teste insuficiente" de Cauchy.*

3. *Aplique o* teste de Cauchy *às sucessões abaixo e as classifique como (1) de Cauchy, se o teste for satisfeito, e (2) divergente se o teste não for satisfeito:*

a) $s_n = \frac{1}{n+1}$	*b)* $s_n = \frac{n^2}{n}$	*c)* $s_n = \frac{n^2}{2n^2}$	*d)* $s_n = n$

4. <u>*difícil, para motivar a próxima seção*</u> *Aplique o teste de Cauchy à sucessão $s_n = (1 + \frac{1}{n})^n$.*

4.4.2 Propriedades do limite

Um dos exercícios da lista precedente tinha como objetivo mostrar que a aplicação direta do teste de Cauchy a uma sucessão pode ser um trabalho gigantesco. É muit difícil provar diretamente que $s_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ é de Cauchy.

O conjunto de todas as sucessões convergentes, (ou de sucessões de Cauchy), são uma representação dos números reais. Esta representação não tem unicidade, uma vez que várias, (uma infinidade delas), representam o mesmo número, como acontece com os números racionais.

Da mesma forma como podemos somar os números reais, também podemos somar as sucessões e consequentemente

Teorema: 5 *Soma de limites*
A soma dos limites é o limite da soma:

$$\lim_n (s_n + t_n) = \lim_n s_n + \lim_n t_n$$

Nós já usamos este teorema nos exercícios anteriores ao fazer modificações algébrico-lógicas em expressões cujo limite desejavamos calcular.

Da mesma forma, porque sucessões convergentes representam números reais, temos

Teorema: 6 *Produto de limites*
O produto dos limites é o limite do produto:

$$\lim_n (s_n)(t_n) = (\lim_n s_n)(\lim_n t_n)$$

De forma também análoga vale um resultado para a divisão, com a restrição de que o denominado não tenha zero por limite:

Teorema: **7** *Quociente de limites*
O quociente dos limites é o limite do quociente se o denominador não tiver limite zero:

$$\lim_n (s_n/t_n) = (\lim_n s_n)/(\lim_n t_n)$$

se $\lim_n t_n \neq 0$.

Mas em alguns casos, mesmo o limite do quociente sendo zero, podemos calcular o limite do quociente, sem usar este teorema, entretanto, é caso do quociente de diferenças:

Teorema: **8** *Limite do quociente de diferenças*
Se f for uma função derivável, então

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = f'(a)$$

Há uma classe funções que *preserva* o limite:

$$f(\lim_n s_n) = \lim_n f(s_n).$$

Quer dizer que tanto faz, *primeiro* calcular $\lim_n s_n$ e depois aplicar f, ou *primeiro* calcular $f(s_n)$ e depois calcular o limite $\lim_n f(s_n)$. O resulado é o mesmo. Tais funções se chamam *contínuas*. A soma, a multiplicação e a divisão, são exemplos de funções contínuas. Vamos explorar em lista de exercício separada este conceito.

Exercícios: 34 *Propriedades do limite*

1. *Decomponha a sucessão s em somas ou produtos de outras mais simples e calcule $\lim(s)$, ou justifique por que $\lim(s)$ não existe.*

$s_n =$	$s_n =$	$s_n =$	$s_n =$
a) $\frac{n^2+3n+1}{(n+1)^2}$	*b)* $\frac{n+1}{n}$; $n > 0$	*c)* $\frac{(n+1)^2}{n+1}$	*d)* $\frac{3+2n}{n+1}$

2. *Objetivo, as vezes é fácil calcular-se o limite de $\frac{1}{s}$ mas não o de s. Use a função $f(x) = \frac{1}{x}$, contínua para $x > 0$ para calcular o limite de s :* $\lim(f(s)) = f(\lim(s))$.

$f(s_n)$	$f(s_n)$	$f(s_n)$	$f(s_n)$
a) $\frac{n^2}{(n+1)^2}$	*b)* $\frac{n}{n+1}$; $n > 0$	*c)* $\frac{n+1}{(n+1)^2}$	*d)* $\frac{n}{3+2n}$; $n > 0$

3. *<u>Teoria</u> Prove que se s, t forem sucessões de Cauchy, então $s + t$ també o será. Em outras palavras: "se s, t representarem números reais, então $s + t$ representa a soma destes números". Use este teorema diretamente no cálculo dos limites*

a) $\frac{(n+1)^2}{n^2}$	*b)* $\frac{n+1}{n}$; $n > 0$	*c)* $\frac{(n+1)^2}{n^3}$; $n > 0$	*d)* $\frac{3+2n}{n}$; $n > 0$

4. *<u>Sucessão decrescente para zero</u>*
   - *Prove que se $r < 1$ então r^n é decrescente.*
   - *Prove que se $r < 1$ então $\lim_n r^n = 0$.*

5. *<u>Soma de Progressão geométrica</u>*
   - *Verifique que* $1 + r + \cdots + r^n = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}$
   - *Prove que* $1 + r + \cdots + r^n = \sum_{k=0}^{n} r^k$ *converge para* $\frac{1}{1-r}$

6. *<u>Teoria</u> Considere uma sucessão crescente s.*
   - *Prove (por absurdo) que se s tiver* cota superior S *então* $\lim(s) \leq S$.
   - *<u>Sucessões geométricas</u> Prove que* $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$ *e encontre uma cota superior S para a sucessão* $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

   Resposta: $S = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} \approx 2.79166666666666666666.$

Observação: 23 *Existência do limite*
O último exercício ilustra um estudo de limite dos mais difíceis. O exercício somente prova que o limite

$$\lim_n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

existe, mas não oferece nenhuma pista sobre o seu valor a não ser que ele é limitado pelo número 3.

A seguinte suite de exercicios vai lhe mostrar como podemos melhorar *esta estimativa* sem, *contudo, conseguir determinar o limite "exatamente". O número em questão, o limite desta soma, é um número irracional...*

7. *<u>O número e</u>*
   - *Prove que*

     $$\sum_{k=k_0}^{n} \frac{1}{k!} < \sum_{k=k_0}^{n} \frac{1}{3^k}$$

     a partir de um índice k_0, e determine este índice. Resposta: $k_0 = 5$; $S = 1{+}1{+}1/2{+}1/6{+}1/24{+}1/(2*27) \approx 2.72685185185185185185$
   - *Verifique que $n > 8$ então $n! > 4^n$ e daí conclua que*

     $$\sum_{k=k_9}^{n} \frac{1}{k!} < \sum_{k=k_9}^{n} \frac{1}{4^k} n > 9$$

- *Prove que*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < 1 + 1 + \ldots + \frac{1}{8!} + \frac{1}{3*4^8} \approx 2.71828385610429067460$$

Observação: 24 *Binomio de Newton e o número e*

O valor aproximado do número e, que o programa `calc` *tem na memória, com 10 dígitos precisos, é*2.718281825.

É este o símbolo, e, para designar o número irracional representado pela sucessão $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

Muito mais trabalhoso é mostrar que as duas sucessões

- $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \to e$
- $(1 + \frac{1}{n})^n \to e$

tem o mesmo limite. Voce pode encontrar esta demonstração na maioria dos livros de Cálculo. Vamos preferir fazê-la usando o material da última seção, Polinômio de Taylor.

8. *Considere dois números reais* a, b, *defina*

$$x_1 = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}, x_2 = \frac{ax_1}{\sqrt{a^2+b^2}}, \cdots x_n = \frac{ax_{n-1}}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdots$$

(a) *Mostre que existe um número real* α;

$$|\alpha \leq 1 \ ; \ |x_n| = b\alpha^n$$

Sugestão, faça uma representação geométrica de $x_1, x_2, ...$

(b) *Verifique que se* $\alpha = 1$ *então*

$$\forall \ n; \ x_n = 0$$

(c) *Prove que* $x_n \to 0$.

9. *Considere uma sucessão de números racionais x;*

$$(x_n)_n \ ; \ x_n \to a.$$

Mostre que se $f(x) = x^2+3x+2$ *então a sucessão* $y_n = f(x_n)$ *é convergente e* $y_n \to (a+2)(a+1)$.

4.4.3 O operador limite

Limite é um operador que *formaliza* os cálculos que fizemos anterioremente. Ele nada mais é que a síntese do trabalho[a].
Veja o que estamos dizendo, no seguinte exemplo:

Exemplo: 18 *Cálculo do limite de uma sucessão* *Considere a sucessão* $s = (s_n)_{n>0} = (\frac{n+1}{n})_{n>0}$.

- *Análise lógica* *s é uma sucessão decrescente porque* $\forall \ n \ (s_{n+1} < s_n)$.
- *Análise algébrica* *Podemos decompor a fração* $\frac{n+1}{n}$ *em duas outras:*

$$\frac{n+1}{n} = \frac{n}{n} + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$$

- *Análise lógica* *A sucessão* $\frac{1}{n}$ *representa o zero, logo a soma* $1 + \frac{1}{n}$ *representa* 1.
- *Conclusão*

$$\lim_{n} \frac{n+1}{n} = 1$$

O exemplo analisado ainda nos fornece a técnica para o cálculo do limite. Por outro lado vemos a dificuldade intrínseca do cálculo de limites claramente exposta na análise *algébrico-lógica* que fizemos acima.
Onde aparece a palavra *representa* temos a definição de número real que se confunde com o valor do operador *lim*.

[a] Algo assim como quando o prefeito vai à televisão e diz que limpou a cidade, quando quem a limpou foram os garis...

Dissemos que o conceito de limite é difícil. Não estamos sós, segundo Courant, um dos raros matemáticos que reuniu uma profunda capacidade de pesquisa aliada a uma notável habilidade pedagógica, *limite* é o *limiar da Matemática Superior.*

O fato de atestarmos que aqui existe uma dificuldade não significa que estejamos sugerindo que o leitor deva se sentir aniquilado ou impotente. A Matemática é uma *linguagem abstrata* que serve para modelar o nosso raciocínio. Como ao estudar uma lingua estrangeira, um erro seria fazê-lo com traduçòes para sua ligua nativa. Lembre-se, se for possível, como foi que aprendeu sua lingua materna, não foi por comparações com outra...

Esta comparação vale para o aprendizado de Matemática. O exemplo acima lhe mostra como cálcular limites, entremeando comparações lógicas e simplificações aritméticas.

Aqui faremos uso de dois aspectos seus:

- Na definição de número real, partindo dos números racionais.
- Na definição formal de integral e derivada.

4.4.4 Sucessões, limites e indução finita

Um método de uso muito comum é *indução finita.* Este método se confunde com o conjunto dos números naturais. O que é o conjunto **N** ? Difícil de responder, Kronecker, dizia que " *Deus nos dera o conjunto* **N***, o resto nós construimos*".

Mas podemos considerar os Axiomas de Peano como uma definição da sucessão dos números naturais:

Definição: 24 *Axiomas de Peano*

- *Existe um primeiro número natural, zero.*

- *Em* **N** *existe uma operação chamada, de sucessor_de() que associa a cada número natural um outro, de tal modo que*
  - *todo número natural tem um sucessor;*
  - *zero não é sucessor de nenhum número natural.*

O método da indução finita é uma réplica destes axiomas dizendo que uma afirmação $P(n)$ é verdadeira se, e somente se,

- $P(n_0)$ for verdadera para um número natural inicial n_0.
- Se a implicação $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ for verdadeira para $n > n_0$.

Teorema: 9 *A soma dos quadrados*
A soma dos quadrados dos n primeiros números naturais é:

$$P(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Dem: *Para demonstrá-lo vamos usar o método da indução finita:*

- $P(1) = 1$ *é a soma do quadrado do primeiro número natural.*
- *Suponhamos verdadeira que "a soma dos n primeiros números naturais seja dada pela expressão* $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ *e vamos verificar qual seria a expressão da soma dos* $n+1$ *primeiros quadrados.*
- *Se a soma dos n primeiros quadrados é* $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, *verdadeiro por hipótese, (para podermos verificar a implicação), então vejamos qual será a expressão* $P(n+1)$ *obtida ao somarmos a* $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ *o próximo quadrado* $(n+1)^2$.

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6} =$$
$$\frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6} =$$
$$\frac{(n+1)[2n^2+n+6n+6]}{6} = \frac{(n+1)[2n^2+7n+6]}{6} =$$
$$\frac{(n+1)[(2n+3)(n+2)]}{6} = \frac{(n+1)[2(n+1)+1](n+1+1)]}{6}$$

Ora, a última expressão é o valor de $P(n+1)$ *e isto prova que* $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

q.e.d .

Exercícios: 35 *Sucessões e indução finita*

1. *Mostre que não existe um supremo para a sucessão dos números naturais.*
2. *Prove que a soma dos n primeiros números naturais não nulos é*
$$P(n) = \frac{n(n+1)}{2}.$$
3. *Prove que* $1 + 3 + \cdots + (2n-1)^2 = n^2$.
4. *Prove que* $\sum_{k=1}^{n} k^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$.
5. *Prove que*
$$\sum_{k=0}^{n-1} k^4 = \frac{6x^5 - 15x^4 + 10x^3 - x}{30}$$
6. *Prove que*
$$\sum_{k=0}^{n-1} k^5 = \frac{2x^6 - 6x^5 + 5x^4 - x^2}{12}$$
7. *Algoritmo da divisão euclidiana Dado um número natural d prove que, para todo número natural n existem dois números naturais* q, r *tal que*
$$n = dq + r \ ; \ 0 \le r < d.$$
8. *Descubra a falácia na seguinte demonstração por indução: "Todos os cavalos têm a mesma cor."*
   Dem:
   - $P(1)$ *é verdadeiro, porque se só tivermos um cavalo, só podemos ter uma cor.*
   - *Suponha verdadeiro, hipótese de indução, que em qualquer conjunto formado por k cavalos, todos os cavalos terão a mesma cor.*
   - *Considere agora um conjunto formado por* $k+1$ *cavalos. Tirando um cavalo, arbitrariamente do conjunto, sobram k cavalos, e pela hipótese de indução todos terão a mesma cor. Retire mais um cavalo deste conjunto e reponha o anterior, logo teremos um conjunto com k cavalos, e portanto todos de mesma cor, logo o cavalo tirado inicialmente tinha a mesma cor que os demais e assim o conjunto com* $k+1$ *cavalos era formado de cavalos todos com a mesma cor.*
     Assim, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ *e fica assim provado que todos os cavalos tem a mesma cor.*

   q.e.d .
9. *Prove que* $n! > 2^n$ *a partir de um número inteiro positivo* n_0 *que você deve determinar.*
10. *Prove que* $n! > 3^n$ *a partir de um número inteiro positivo* n_0 *que você deve determinar.*
11. *Prove que* $n! > 5^n$ *a partir de um número inteiro positivo* n_0 *que você deve determinar.*
12. *Prove que* $n!$ *é maior do que qualquer potência de qualquer número inteiro positivo, a partir de um determinado número inteiro positivo* n_0 *que você deve determinar.*
13. *O que se encontra por traz das somas de potências*
    (a) *Prove que, se P for um polinômio do grau n então*
    $$\Delta_{\Delta x}(P) = P(x + \Delta x) - P(x)$$
    é um polinômio do grau $n-1$.

(b) *Se P for um polinômio do grau n então $Q(x) = P(x+1) - P(x)$ é um polinômio do grau $n-1$.*

(c) *<u>Uma espécie de recíproca</u> Considere $Q(x) = x^n$. Mostre que existe um polinômio do P grau $n+1$ tal que*

$$Q(n) = P(n+1) - P(n)$$

(d) *<u>Um corolário da recíproca</u> Considere $Q(x) = x^n$. Mostre que existe um polinômio do P grau $n+1$ tal que*

$$\sum_{k=0}^{N-1} Q(k) = P(N) - P(0)$$

(e) *Determine P tal que*

$$\sum_{k=0}^{N-1} k^3 = P(N) - P(0)$$

(f) *Determine P tal que*

$$\sum_{k=0}^{N-1} k^4 = P(N) - P(0)$$

14. *<u>Binômio de Newton</u> Prove, por indução finita, que*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = (a+b)^n$$

4.5 Teoremas sobre continuidade

Veremos mais algumas relações envolvendo a continuidade de uma função, por exemplo, sua derivabilidade. Como já fizemos no início do capítulo, estudar a continuidade envolve discutir as funções descontínuas.

Vejamos exemplos de funções *descontínuas*, para comparação:

Exemplo: 19 *A derivada da função módulo*

A (fig. 4.6), página 153 mostra o gráfico da função módulo, $f(x) = |x|$. Nele vemos que f' não está definida no ponto $x = 0$ e que os valores da derivada à esquerda e à direita não coïncidem:

$$f'(0^-) = -1 \ ; \ f'(0^+) = 1.$$

Quer dizer que o número $f'(0)$ não está definido, ou ainda que, dada uma sucessão qualquer s que represente 0, nada garante que $f'(s)$ represente algum número, veja a próxima lista de exercícios.

Consequentemente $f(x) = |x|$ não tem derivada na origem. Apesar de a derivada não existir na origem, $f(0)$ existe e está bem definido: f está definida na origem, mas não tem um coeficiente angular instantâneo em 0. O gráfico sugere a razão para isto, ele é formado por duas semiretas que no ponto $(0, f(0))$ determinam um ângulo, portanto em $(0, f(0))$ não pode haver reta tangente, nem coeficiente angular instantâneo.

Este exemplo também ilustra as considerações iniciais, foi preciso estudarmos a derivada de f para encontrarmos um exemplo de descontinuidade.

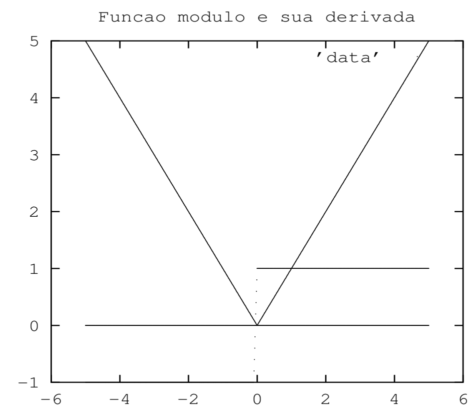

Figura 4.6: A derivada de f é descontínua na origem: $f'(0)$ não existe.

4.5.1 Derivadas descontínuas

Exercícios: 36 *Cálculo de algumas derivadas exatamente*

1. *<u>Derivada de $y = f(x) = |x|$</u> Considere a definição de $|x|$:*

$$y = f(x) = \begin{cases} x \le 0 & |x| = x \\ x < 0 & |x| = -x \end{cases} \tag{4.11}$$

Considere um[2] deslocamento $\Delta x > 0$.

- *calcule $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ para $x > 0$ Resposta: 1.*
- *calcule $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ para $x < -\Delta x$ Resposta: -1.*
- *calcule $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ para $-\Delta x \le x < 0$ Resposta: equação do segmento de reta, ligando os pontos $(-\Delta x, 0), (0, 1)$.*
- *Trace o gráfico de $y = \frac{\Delta y}{\Delta x}(x)$ e compare com a (fig. 4.8).*

[2]Observe que, apesar da notação, Δx nada tem o que vem com x. Tem o que ver com o eixo horizontal OX.

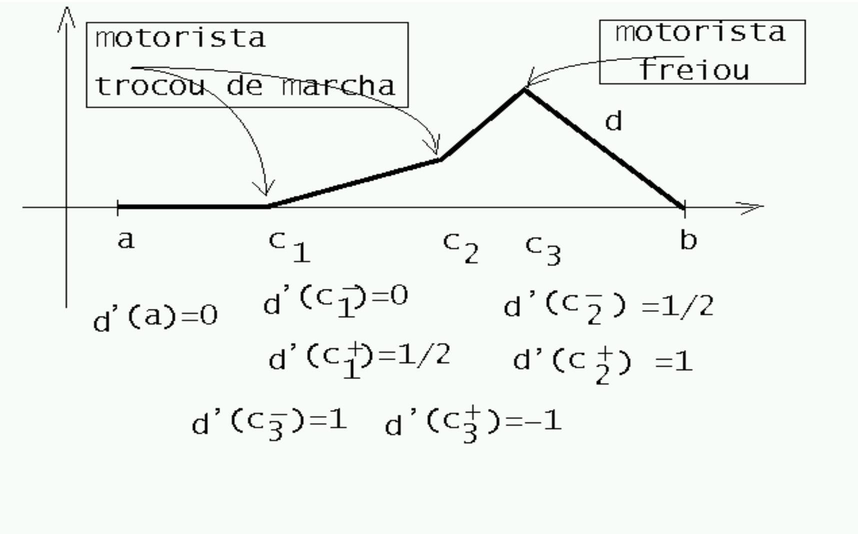

Figura 4.7: A velocidade é uma função contínua, com piques nas mudanças de marcha.

Outro exemplo semelhante ao da função módulo, com mais pontos de descontinuidade da derivada.

Exemplo: 20 *Motorista barbeiro e velocidade do carro*

O gráfico da função, (fig. 4.7), representa a curva da velocidade de um carro dirigido por um motorista aprendiz. Inicialmente, no intervalo $[a, c_1]$, *o carro está em repouso e repentinamente o motorista passa a marcha sem se lembrar da existência da embreagem. O carro se movimenta violentamente, mas de forma contínua, porém a aceleração dá um salto de* $0km/h^2$ *para* $\frac{1}{2}km/h^2$ *até o momento* $t = c_2$ *quando nova passagem de marcha sem auxílio da embreagem leva o carro para uma nova aceleração de* $1km/h^2$. *No momento* $t = c_3$, *o motorista, vendo um obstáculo, freia violentamente, sem usar a embreagem, fazendo o carro estancar e parar violentamente depois de um breve intervalo com aceleração negativa (efeito do freio).*

Compare as figuras, (fig. 4.7), página 154 e (fig. 4.8), página 155.

A derivada (aceleração) é descontínua em quatro pontos: $\{c_1, c_2, c_3, b\}$ *neste pontos temos:*

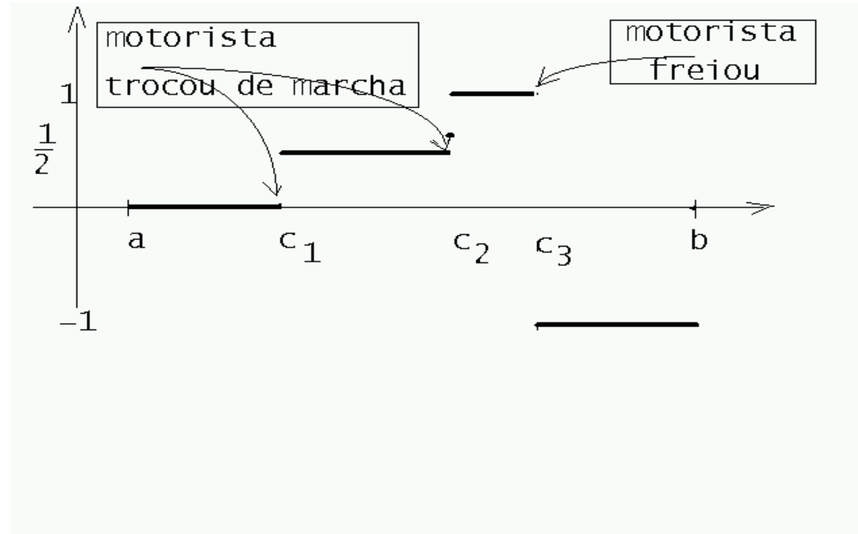

Figura 4.8: O gráfico da derivada de d, (aceleração), no caso do motorista barbeiro.

$$d'(c_1^-) = 0; d'(c_1^+) = \tfrac{1}{2}; \tag{4.12}$$
$$d'(c_2^-) = \tfrac{1}{2}; d'(c_2^+) = 1; \tag{4.13}$$
$$d'(c_3^-) = 1; d'(c_3^+) = -1; \tag{4.14}$$
$$d'(b^-) = -1; d'(b^+) = 0 \tag{4.15}$$

A derivada de d (aceleração) é descontínua nos pontos c_1, c_2, c_3 *quer dizer que nestes pontos* d' *não existe, não está definida. Ver (fig. 4.8) página 155.*

Observação: 25 *A notação* $d(a^+), d(a^-)$

No exemplo (fig. 4.8), página 155, a função derivada, (aceleração), não tem valores bem definidos em quatro pontos c_1, c_2, c_3, b *porque tem valores diferentes à direita ou à esquerda, nestes pontos. A notação* $d'(a^-)$ *se refere ao limite à esquerda no ponto* $\underline{a}$, *de forma análoga,* $d'(a^+)$ *se refere ao limite à direita, no mesmo ponto* $\underline{a}$.

Estes valores são chamados `limites laterais` *de* d' *e como são diferentes significa que* d' *tem um salto neste ponto, sendo portanto descontínua.*

Para uma função f qualquer, se $f(a^-) \neq f(a^+)$ então o ponto $\underline{a}$ é um ponto de descontinuidade de f, ou um ponto de salto.

Se uma função f for contínua, *então em todo ponto* $\underline{a \in Dom_f}$ *;*

$$f(a^-) = f(a^+).$$

Finalmente, tem uma maneira intuitiva de se referir às funções descontínuas. Se uma função for descontínua, para fazer-lhe o gráfico temos que retirar o lápis do papel, em algum momento. Com as funções contínuas para traçar-lhes os gráficos não precisamos tirar o lápis do papel do começo ao fim do gráfico. Veja que este último parágrafo contém uma idéia intuitiva que nem sempre pode ser usada para conectar este conceito com outros, (fazer uma demonstração).

Vamos à definição formal do conceito de continuidade.

Definição: 25 *Função seqüencialmente contínua f.*

Uma função f é seqüencialmente contínua em uma região $\Omega \subset \mathbf{R}$ se

$$\forall a_n \to a \in \Omega \ \Rightarrow \ f(a_n) \to f(a).$$

Em suma, f está bem[3]definida *para toda "representação"* de $a \in \Omega = Dom_f$. Geometricamente isto ainda significa

- que f não dá saltos em nenhum ponto de Ω;
- se f der um salto em algum ponto de Ω, diremos, pelo contrário, que f é descontínua neste ponto do domínio Ω.

Observação: 26 *Continuidade e compatibilidade com a estrutura algébrico topológica*

Outra forma de descrever continuidade, *como já dissemos antes, é:* as funções contínuas preservam a convergência das sucessões.

Tem mais coisa por traz disto, fique com as informações agora, depois você irá compreendê-las melhor:

- *classes de equivalência de números reais O conjunto das sucessões de números racionais convergentes definem* $\mathbf{R}$. *Mas elas formam classes de equivalência que definem o mesmo número, como acontece também com os racionais. Veja o exemplo do número e com duas sucessões diferentes que o definem (duas que conhecemos...)*
- *continuidade e compatibilidade com as classes de números reais As funções* contínuas *identificam as classes de equivalência respondendo com o mesmo valor para todos os elementos da classe. É isto que chamamos de* respeitar a convergência.
- *Limite define as classes O operador* lim *é a ferramenta para identificar quando duas sucessões se encontram na mesma classe de equivalência. Porisso sempre confundimos* $s, (s_n)_{n\in\mathbf{N}}, a = \lim_n s_n$ *quando este último existir. Não existe diferença entre eles. Confusão não é uma palavra negativa...*
- *Limite define a topologia O conceito de* convergência *define a estrutura topológica de* $\mathbf{R}$, *continuidade é um conceito topológico logo as funções contínuas têm que respeitar a convergência.*
- *Limite, álgebra e topologia*
  A álgebra e a topologia se encontram interligadas, consequentemente as funções algébricas, adição e produto tem que ser contínuas. Não mencionamos a divisão, porque divisão não é "exatamente" algébrica...

Muito do que foi dito acima foge do contexto do Cálculo, mas tem que ser usado dentro do Cálculo, é isto que torna as coisas difíceis. Mas, lembre-se, difícil não é impossível, é apenas *difícil.*

[3]a continuidade é definida genericamente por uma *topologia*, que é um tipo de estrutura matemática, em algumas topologias preservar convergência é insuficiente para se ter continuidade. No Cálculo isto não ocorre, portanto, "continuidade sequencial" *equivale a* "continuidade".

Exercícios: 37 *Estoque de funções contínuas*

1. *notação*[4]

   Dado um número a designaremos por a_c a uma sucessão qualquer crescente *que represente o número a, e designaremos por a_d uma sucessão qualquer* descrescente *que determine o mesmo número a. Use a sucessão $(\frac{1}{n})_{n>0}$ para*

   - *construir uma sucessão crescente que represente 3*
   - *construir uma sucessão decrescente que represente 3*

2. *Considere a sucessão $s = (\frac{(-1)^n}{n})_{n>0}$.*

   - *Escreva os primeiros 10 elementos desta sucessão.*
   - *Justifique por que s representa o zero.*
   - *Escreva os primeiros 10 elementos da sucessão $s + 3$.*
   - *Qual o número que $3 + s$ representa ?*
   - *$3 + s$ é decrescente? crescente ?*

3. *Considere a derivada da função módulo,f', (a derivada existe para todos os pontos diferentes de zero). Calcule $f'(a)$; $a \neq 0$, usando as regras de derivação que você conhecer.*

   (a) *Verifique que, se uma sucessão a_c convergir crescendo para 0, então $f'(a_c)$ tem limite e calcule este limite.*

   (b) *Verifique que se uma sucessão a_d for decrescente, e tiver limite 0 então $f'(a_d)$ tem limite e calcule este limite.*

4. *Se v' representa a aceleração com que o motorista aprendiz dirige no exemplo (fig. 4.8), página 155, calcule os limites laterais*

   $$v'(a+), v'(c_1^+), v'(c_1^-), v'(b-).$$

   Existem os limites laterais $v'(a-), v'(b+)$? justifique.

[4]Estamos usando uma notação que não é padronizada, invente outra, se preferir: chamamos de a_c a uma sucessão crescente que define o número a. Chamamos de a_d a uma sucessão decrescente que define o número a.

5. *Calcule* $\int\limits_a^b v$ *em que* v *é velocidade do carro definido no exemplo (fig. 4.7), página 154. Interprete o resultado.*

6. *continuidade da função constante Prove que* $f(x) = k$, *em que* k *é um número real, é contínua.*

7. *continuidade da identidade Prove que a função* $f(x) = Ax$ *é contínua.*

8. *continuidade da função quadrática Prove que a função* $f(x) = Ax^2$ *é contínua.*

9. *continuidade da função quadrática Prove que a função* $f(x) = Ax^2+Bx+C$ *é contínua.*

10. *continuidade da função de grau n Prove que a função* $f(x) = x^n$ *é contínua.*

11. *continuidade da função de grau n Prove que a função* $f(x) = Ax^n+Bx^{n-1}$ *é contínua.*

12. *continuidade do produto por uma constante Prove que se* f *for uma função contínua, então a função* g *definida por* $g(x) = kf(x); k \in \mathbf{R}$, *é contínua.*

13. *continuidade da primitiva Tome por hipótese que a integral de* f *exista em qualquer sub-intervalo de* $[a, b]$, *e que* f *é limitada. Prove que a função* *Aceite, por contradição que a integral existe em qualquer sub-intervalo*

$$F(x) = \int\limits_a^x f$$

é uma função contínua.

14. *Prove que todo polinômio é uma função contínua.*

15. *continuidade da translação*

    (a) *Mostre que se* f *for uma função contínua então* $g(x) = f(x-a)$, *uma translação de* f, *é também uma função contínua.*

    (b) *Mostre que se sen for contínua, então cos é também uma função contínua.*

    (c) *Deduza que se cos for contínua, então sen também o é. Mostre tambem que se sen for uma função contínua, também*[5] *cos será.*

[5]Claro, tudo que temos que fazer agora é demonstrar que uma das duas é contínua...

4.5.2 Continuidade e descontinuidade

Exercícios: 38 1. *Dê exemplo de*

- *uma sucessão crescente cujo limite seja zero.*
- *uma sucessão decrescente cujo limite seja zero.*
- *uma sucessão crescente cujo limite seja 1.*
- *uma sucessão decrescente cujo limite seja 1.*
- *uma sucessão crescente cujo limite seja a.*
- *uma sucessão decrescente cujo limite seja a.*
- *Sucessões que não sejam nem crescentes nem decrescentes, para cada caso acima, (sucessões oscilantes)*

2. *Justifique, usando sucessões oscilantes, por exemplo*

$$(\frac{(-1)^n}{n} \ ; \ n > 0,$$

que nos extremos do intervalo $[a, b]$ *a função característica* $\chi_{[a,b]}$ *deixa indefinidos os valores* $\chi_{[a,b]}(a), \chi_{[a,b]}(b)$.

3. *estoque de funções contínuas.*

    (a) *a operação produto Mostre que a função*

    $$f_k(x) = kx \ ; \ k \in \mathbf{R} \ \ dado$$

    é uma função contínua.

    (b) *Mostre que se* f *for contínua e* α *um número, então,* αf *é contínua.*

    (c) *produto de funções contínuas Mostre que se* f, g *forem duas funções contínuas então a função* fg *será uma função contínua.*

    (d) *soma de funções contínuas Mostre que se* f, g *forem duas funções contínuas então a função* $f + g$ *será uma função contínua.*

    (e) *a operação soma Mostre que a função*

    $$f_k(x) = k + x \ ; \ k \in \mathbf{R} \ \ dado$$

    é uma função contínua. Em particular, (porque), mostre que se f *for contínua e* α *um número, então,* $\alpha + f$ *é contínua.*

    (f) *translação Mostre que a função*

    $$f_k(x) = f(x - k) \ ; \ k \in \mathbf{R} \ \ dado$$

    é uma função contínua.

    (g) *indução finita Mostre que toda função polinomial é contínua, use os resultados anteriores para construir a justificação. .*

4. *Faça o gráfico de* $f + \chi_{[-3,5]}$ *com* $f(x) = x$.

5. *Mostre que se* P *for um polinômio e* $f = \chi_{[a,b]}$ *então a função* $g = P + f$ *será descontínua em exatamente dois pontos, quais? Faça um gráfico usando um polinômio do segundo grau.*

6. *Saltos quânticos de energia*

   (a) *Defina*
   $$f(x) = \int_0^x \chi_{[1,2]}$$
   Faça seu gráfico e justifique porque f *é contínua. Encontre a equação de* f.

   (b) *Defina*
   $$f(x) = \int_0^x \chi_{[0,1]}$$
   Faça seu gráfico e justifique porque f *é contínua. Encontre a equação de* f.

   (c) *Defina*
   $$f(x) = \int_0^x \chi_{[-1,1]}$$
   Faça seu gráfico e justifique porque f *é contínua. Encontre a equação de* f.

   (d) *Intervalo aberto Defina*
   $$f(x) = \int_0^x \chi_{(-1,1)}$$
   Faça seu gráfico e justifique porque f *é contínua. Verifique que para integração, "um ponto tem massa despresível"não alterando a continuidade. Encontre a equação de* f.

   (e) *Calcule a derivada de* f *em cada um dos casos acima. Analise, para a derivada, a importância de um ponto.*

7. *Defina*
   $$f(x) = \int_\alpha^x \chi_{[a,b]}$$
   Encontre a equação de f *e demonstre que ela é contínua. Qual é a derivada de* f.

8. *Considere* $f(x) = x$. *Calcule* $G(x) = \int_a^x f + \chi_{[0,1]}$.

Observação: 27 *Descontinuidade não é um conceito negativo*
Há funções descontínuas de grande importância, como a função
$$f(x) = \frac{1}{x},$$
ou as funções características
$$g(x) = \chi_{[a,b)},$$
que representam níveis de energia constantes durante um lapso de tempo, *um sinal.*

São dois tipos de continuidade.

Funções como $f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = \frac{1}{x^2}$ *servem para modelar a aproximação de uma fonte de alta energia, perto das quais a* lógica da energia finita *colapsa: perto do Sol, perto de um buraco negro.*

Por exemplo, quando você passa de carro, perto de um destes mal educados que usam alto-falantes de alta potência para escutar a sua musiquinha particular, nota que, a medida com que você se afastar, rapidamente o som descresce. A dispersão sonora obedece a um modelo semelhante ao de uma função como $f(x) = \frac{1}{x}$, *há que considerar a direção em que o vento "sopra" pois o som é influenciado pelas correntes de vento, som é onda mecânica.*

4.5.3 Operações aritméticas e continuidade

Nesta seção vamos mostrar que existe um grande estoque de funções continuas e estudar a relação entre as operações aritméticas e a continuidade.

Exercícios: 39 *Continuidade e aritmética*

1. *Mostre que, se duas funções* f, g *forem continuas, então a soma,* $h = f + g$ *é uma função contínua.*

2. *Mostre que, se duas funções* f, g *forem continuas, então o produto,* $h = fg$ *é uma função contínua.*

3. *corolário Mostre que todo polimômio define uma função contínua.*

4. *Mostre que tan é uma função contínua exceto em alguns pontos. Descreva os pontos de descontinuidade de tan.*

5. *Mostre que se* $P(x)$ *for um polinômio com raizes reais, então* $f(x) = \frac{1}{P(x)}$ *é contínua em qualquer intervalo entre duas raizes consecutivas, (coloque as raizes em ordem, entre duas raizes consecutivas não há outra raiz).*

6. *Seja* $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ *uma* função racional, *quer dizer que* P, Q *são polinômios. Mostre que existem* n *intervalos abertos da reta em que* f *é contínua, e explcite quem é o número* n.

4.5.4 Sucessão dos quociente de diferenças

Existe uma diferença qualitativa entre esta seção e a anterior.

Na seção anterior as sucessões são númericas, quer dizer que os elementos das sucessões, seus componentes, são números racionais.

Agora vamos dar exemplos de sucessões de funções, quer dizer, os componentes das sucessões são funções.

Veja os gráficos (fig. 4.9), (fig. ,4.10) e (fig. ,4.11), nas páginas 162,163 e 164, respectivamente. Eles contém, para três funções diferentes, os gráficos das funções "quociente de diferenças" com dois valores para $\Delta x; \Delta x \in \{1, \frac{1}{10}\}$.

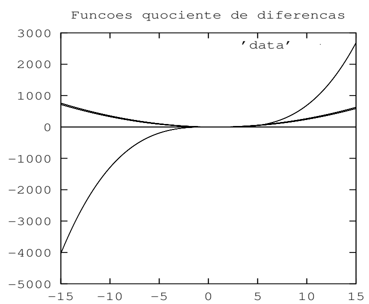

Figura 4.9: Quociente de diferenças Δf com $\Delta x \in \{\frac{1}{10}, 1\}$ e $f(x) = x^3 - 3x^2 - x$.

O *quociente de diferenças*, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ é feito com um valor fixo para Δx, veja os exemplos (fig. 4.9), (fig. ,4.10) e (fig. ,4.11), nas páginas 162,163 e 164,em que $\Delta x \in \{1, 0.1\}$.

Podemos inventar uma notação:

$$\Delta_{0.1}(f) = \frac{\Delta y}{\Delta x}_{\Delta x = 0.1} \tag{4.16}$$

significando "quociente de diferenças de f quando $\Delta x = 0.1$.

O quociente de diferenças é usado em programas de computação para calcular aproximadamente a derivada de uma função. Nos vamos usar a notação (eq. 4.16) nos exercícios abaixo.

Exercícios: 40 *Quociente de diferenças*

1. *Quociente de diferenças e reta "tangente"*

   - *Calcule o quociente de diferenças de* $f(x) = x^2 - 4, \Delta_{0.1}(f)$ *quando* $\Delta x = 0.1$. *Simplifique a expressão.*

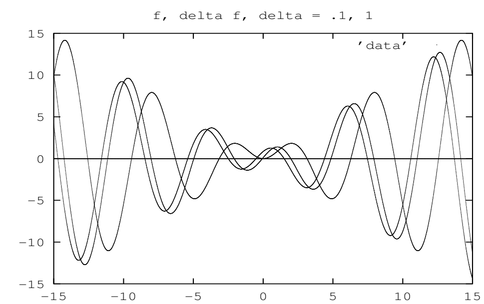

Figura 4.10: Quociente de diferenças Δf com $\Delta x \in \{\frac{1}{10}, 1\}$ e $f(x) = xsen(x)$.

   - *Calcule o número* $m = \Delta_{0.1}(f)(2)$.
   - *Trace num mesmo sistema de eixos o gráfico de* f *e da reta* (r) $y = m(x-2)$.
   - *Comente a afirmação: "A reta r aparentemente é tangente ao gráfico de f." Você concorda com esta afirmação ou ela deveria usar a palavra "aproximação" ?*

2. *Calcule o quociente de diferenças de um polinômio do grau 3. Comente: "este cálculo prova que o quociente de diferenças de um polinômio do grau 3, é um polinômio do grau 2".*

3. *Calcule o quociente de diferenças de um polinômio do grau 4. Comente: "este cálculo prova que o quociente de diferenças de um polinômio do grau 4, é um polinômio do grau 3".*

4. *Grau de um quociente de diferenças Demonstre que "o quociente de diferenças de um polinômio do grau n, é um polinômio do grau* $n-1$*".*

5. *Calcule* $\Delta_{\Delta x}(f)$ *com* $f(x) = |x|$ *e simplifique algebricamente as expressões obtidas.*

   (a) *Faça o gráfico da função*

   $$y = \Delta_{\Delta x}(f)(x)$$

   para um valor arbitrário de Δx.

(b) Faça o gráfico da função

$$y = \Delta_{0.2}(f)(x)$$

(c) Faça o gráfico da função

$$y = \Delta_1(f)(x)$$

Observação: 28 *Inexistência da derivada num ponto*

O terceiro exemplo gráfico, da lista que estudamos acima, (fig. ,4.11), na página 164, tem uma lição particular para nos dar: Quando $\Delta x = \frac{1}{10}$ o gráfico mostra um salto no ponto $x = 0$ entre duas retas. A análise da função $f(x) = |x|$ neste ponto justifica o que ocorre.

No ponto $x = 0$, a função valor absoluto *troca instantâneamente de coeficiente angular, de -1 para 1 e consequentemente* não tem *coeficiente angular instantâneo neste ponto onde ela tão pouco pode ter uma reta tangente.*

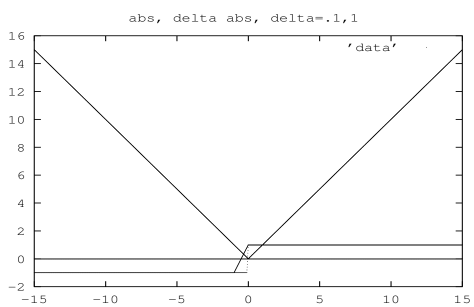

Figura 4.11: Quociente de diferenças Δf com $\Delta x \in \{\frac{1}{10}, 1\}$ e $f(x) = |x|$.

A função derivada existe, *mas não está definida no ponto $x = 0$:*

$$\begin{cases} f'(x) & = 1 \Leftarrow x > 0 \\ f'(x) & = -1 \Leftarrow x < 0 \end{cases} \tag{4.17}$$

Os gráficos (fig. 4.12),(fig. 4.2) páginas 165, 134, respectivamente, exemplificam a mesma situação, do ponto de vista de sucessões numéricas. <u>Observe</u> que os gráficos (fig. 4.9), (fig. ,4.10) e (fig. ,4.11), nas páginas 162,163 e 164, também apresentam sucessões muito resumidamente, apenas duas... se tratam de sucessões de funções.

Podemos assim associar à f uma família de novas funções definidas por

$$f \mapsto \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \Delta_h(f)(x)$$

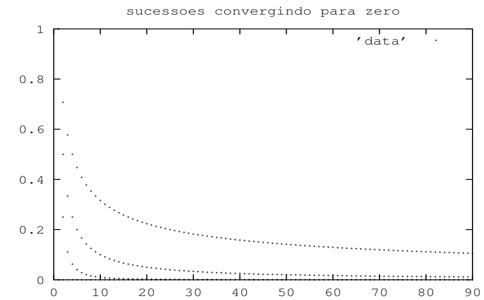

Figura 4.12: Sucessões convergindo para zero.

em que $h = \Delta x$. Para cada valor do parâmetro h. Os três gráficos que obtivemos, em conjunto nos dão uma nova lição. Em dois casos as funções *quociente de diferenças* aparecem como "deslocamentos" uma da outra. Se a diferença Δx diminuir, uma vai sobrepor a outra. Tais experimentos são interessantes, mas Matemática não é uma ciência experimental, os fatos observados devem ser demonstrados formalmente.

A frase "Se a diferença Δx diminuir, uma vai sobrepor a outra." faz referência a um conceito novo, "comportamento assintótico," que os próximos exercícios vão exemplificar.

4.5.5 Derivada e continuidade

Um dos principais objetivos desta seção, entre outros, é de transmitir-lhe a idéia de que "derivada" é um grau mais avancado de continuidade, ou seja:

Teorema: 10 *Derivabilidade e continuidade*

Se f for uma função derivável[6] *então f é contínua, mas, reciprocamente, f pode ser contínua, sem ser derivável.*

Em outras palavras:

$$derivabilidade \Rightarrow continuidade; \tag{4.18}$$

$$continuidade \overset{\text{não}}{\Rightarrow} derivabilidade; \tag{4.19}$$

$$f \text{ é diferenciável} \Rightarrow f \text{ écontínua} \tag{4.20}$$

[6]Se seus estudos avançarem em Matemática, você vai encontrar uma forma generalizada de derivar em que este teorema se torna falso... na teoria das distribuições.

no Cálculo.

Vamos trabalhar com mais alguns conceitos cuja definição se encontram a seguir.

Definição: 26 *Supremo e ínfimo*

- *Supremo Se um conjunto $A \neq \emptyset$ se A possuir* cota superior*, a menor das cotas superiores se chama* `supremo de` *A ou abreviadamente $Sup(A)$.*
- *ínfimo Se um conjunto $A \neq \emptyset$ se A possuir* cota inferior*, a maior das cotas superiores se chama* `ínfimo de` *A, abreviadamente $inf(A)$.*
- *Máximo Pode acontecer que $Sup(A) \in A$, neste caso o chamaremos de* `Máximo` *de A, abreviadamente $Max(A)$.*
- *Mínimo Pode acontecer que $inf(A) \in A$, neste caso o chamaremos de* `Mínimo` *de A, abreviadamente $min(A)$.*

Exemplo: 21 *$A = sen(n)_{n\in\mathbf{N}}$ Esta sucessão tem um comportamento assintótico caótico. Mas A é limitada superiormente e inferiormente, quer dizer que tem* `cotas superiores`, `cotas inferiores`.

Mais do que isto, existe a menor cota superior de *A que é 1 e existe a maior* `cota inferior` *de A que é -1.*

$$\boxed{\text{Quer dizer que } 1 = Sup(A)\ ;\ -1 = inf(A).}$$

Entretanto

- *$1 \notin A$ logo 1 não é $Max(A)$,*
- *nem $-1 \in A$ logo -1 não é $min(A)$.*

Exemplo: 22 *Máximo, mínimo*

- *Com máximo, mas sem mínimo A sucessão $s = (\frac{n+1}{n})_{n\in\mathbf{N}^*}$ é decrescente como podemos verificar:*

$$s_{n+1}/s_n = \frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)} = \frac{n+2}{n} > 1 \equiv s_{n+1} > s_n,$$

quer dizer que $\forall n > 1$; $s_1 > s_n$. s_1 é uma cota superior para s. Mais do que isto, s_1 é a menor das cotas superiores, portanto s_1 é o supremo de s. Como, além disto, $s_1 \in s$ então $s_1 = Max(s)$. dizemos que supremo *é a* melhor das cotas superiores

Entretanto s não tem mínimo. Por outro lado, qualquer número negativo é cota inferior para s. Melhor do que isto, como $s_n = \frac{n+1}{n}$ é uma fração imprópria*, então*

$$\forall\ n\ 1 < s_n$$

e vemos assim que 1 é uma cota inferior para s. Mas 1 é a maior das cotas inferiores*, ou ainda* a melhor cota inferior.

Vimos que $1 = \inf(s)$ mas $1 \notin s$ logo não o mínimo de s.

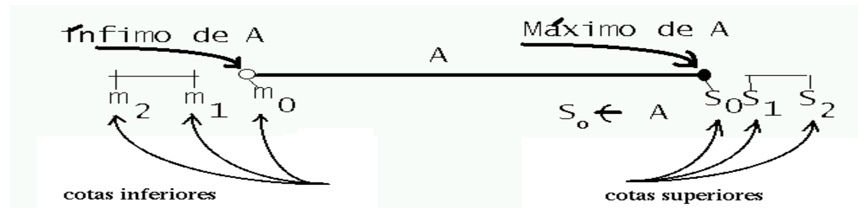

Figura 4.13: Supremo e Infimo de um sub-conjunto da reta; O máximo, aqui, conïcide com o supremo.

- *Com mínimo, sem máximo*

  Podemos repetir calculos semelhantes aos anterior para mostrar que $t = (\frac{n}{n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ tem mínimo, $0 \in t$.

  Como t é crescente então seu limite $1 = \sup(t) \notin t$ portanto tem um supremo, 1, mas não tem máximo.

$$1 = \lim(t)$$

  porque a sucessão t representa o número 1.

- *Com máximo, sem mínimo É o caso da sucessão $s = (\frac{1}{n})_{n\in\mathbf{N}^*}$. É uma sucessão decrescente e limitada inferiormente, (tem ínfimo) por 0 que também é o seu limite.*

Vamos ver uma definição "técnica" de `ínfimo` e `supremo`.

Por definição, o "supremo" é a maior das cotas superiores de um conjunto, (de uma sucessão).

Considere uma sucessão s, se $S = \sup(s)$ que dizer que S é a menor das cotas superiores, portanto $S - \epsilon$; $\epsilon > 0$ tem que ser menor que alguma cota superior, senão seria o próprio supremo. Ver o gráfico (fig. 4.13), página 167

Um método técnico, para testar a existência do supremo e do ínfimo estáno próximo teorema:

Teorema: **11** *Teste do Supremo e do ínfimo Dado um conjunto* $s \neq \emptyset, S = Sup(s)$ *se, e somente se,*

$$\forall \epsilon > 0 \ S+\epsilon \text{ é uma cota superior de } s \ ; S+\epsilon \notin s,$$

e $S-\epsilon$ *é menor do algum elemento de* s.
$m = inf(s)$ *se, e somente se,*

$$\forall \epsilon > 0 \ m-\epsilon \text{ é uma cota inferior de } s ; m-\epsilon \notin s$$

e $m+\epsilon$ *é maior do que algum elemento de* s.

A demonstração fica como exercício, se trata de uso direto de desigualdades e das definições.

4.5.6 Teorema do Valor intermediário

Exercícios: 41 *Continuidade, derivada e desigualdades.*

1. *Teorema do valor intermediário*
   (a) *Se* f *for uma função contínua, no intervalo* $[a,b]$ *prove que*
   - f *é constante ou;*
   - f *assume os valores* $m, M \ ; \ m < M$ *então*
     - *Suponha que*
       $$f(a) = m \ ; \ f(b) = M \ ; \ a < b \ ; \ y \in [m, M]$$
       Mostre que existe $c \in [a,b] \ ; \ y = f(c)$.
     - *Suponha que*
       $$f(a) = M \ ; \ f(b) = m \ ; \ a < b \ ; \ y \in [m, M]$$
       Mostre que existe $c \in [a,b] \ ; \ y = f(c)$.

2. *Enuncie o Teorema do Valor intermediário, demonstrado no exercício anterior.*

3. *funções limitadas*
   (a) *Justifique porque, se* $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ *for contínua, então existem duas retas paralelas ao eixo* OX *tal que* $grafico(f)$ *se encontra contido entre estas duas paralelas. Chame de* m, M *as ordenadas que definem estas retas, mostre que são cotas inferior e superior do conjunto*
   $$\{y; y = f(x); \ x \in [a,b]\}$$
   (b) *Mostre que as duas cotas indicadas acima podem ser ótimas, quer dizer a menor possível, no caso da cota superior, e a maior possível no caso da infererior.*
   (c) *Mostre que se* f *for contínua em* $[a,b]$ *então* f *tem um* ponto de máximo e um ponto de mínimo *em* $[a,b]$.

4. *Mostre que se* f *for derivável, então* f *é contínua*

5. *derivada do produto Considere duas funções deriváveis,* f, g, *e defina*
   $$m(x) = f(x)g(x).$$
   (a) *Calcule*
   $$\frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{m(x+\Delta x) - m(x)}{\Delta x}$$
   (b) *Acrescente no numerador de* $\frac{\Delta m}{\Delta x}$ *a expressão nula*
   $$f(x+\Delta x)g(x) - f(x+\Delta x)g(x)$$
   e com seu auxílio fatore o numerador para conseguir
   $$\frac{\Delta f}{\Delta x}g(x) + f(x+\Delta x)\frac{\Delta g}{\Delta x}$$
   e deduza daí a expressão da derivada de m.
   (c) *Encontre a expressão da derivada de* $f(x)g(x)h(x)$, *derivada do produto de tres funções diferenciáveis.*
   (d) *Generalize para encontrar a expressão da derivada do produto de* n *funções diferenciáveis*
   $$f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x).$$
   (e) *Calcule a derivada de* $f(x) = x^n$.
   (f) *Calcule a derivada das funções:*

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$xsen(x)$		$sen^2(x)$	
$cos^2(x)$		$sen(x)cos(x)$	
$x^2sen(x)$		$x^2sen(x)$	

6. *Derivada do quociente*
   (a) *Defina* $q(x) = \frac{1}{g(x)}$ *nos pontos em que* g *não se anula. Calcule* $\frac{\Delta q}{\Delta x}$ *e deduza o valor de* $q'(x)$.
   (b) *Se* $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, *calcule* $\frac{\Delta q}{\Delta x}$ *e deduza* $q'(x)$.
   (c) *Calcule a derivada das funções indicando o domínio de validade da expressão encontrada:*

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$\frac{x}{sen(x)}$		$\frac{sen(x)}{x}$	
$\frac{cos(x)}{sen(x)}$		$\frac{sen(x)}{cos(x)}$	
$\frac{x+2}{x+4}$		$\frac{1}{x^2+1}$	

7. *Considere a função*

$$y = \frac{2x^2 - 4x}{|x+1| + |x-3|}$$

   (a) *Mostre que $y = f(x)$ é contínua em* $\mathbf{R}$ *mas sua derivada não existe em dois pontos, (quais?).*
   (b) *Nos pontos $\underline{a}$, em que a derivada não existir, calcule $f'(a+), f'(a-)$.*
   (c) *Verifique a reta $x = 1$ é um eixo de simétria de f. Defina formalmente o que significa esta simetria.*
   (d) *Prove que para grandes valores de x o comportamento assintótico de f é o de uma reta. Encontre a equação desta reta.*
   (e) *Faça o gráfico de $y = f(x)$.*

8. *composta de funções contínuas Mostre que se f, g forem contínuas, então as funções $f(g(x)), g(f(x))$ também serão contínuas quando puderem ser definidas.*

9. *derivada da composta-regra da cadéia*

   Suponha que f, g sejam deriváveis e que a função composta $c(x) = f(g(x))$ esteja definida.

   (a) *Calcule* $\frac{\Delta c}{\Delta x}$
   (b) *Veja que a seguinte "equação" caracteriza a composição de funções:*

$$z = h(x) = f(y) = f(g(x))\ ; x \overset{g}{\mapsto} y \overset{f}{\mapsto} z.$$

   Insira, agora, no númerador e no denominador de $\frac{\Delta h}{\Delta x}$ o mesmo fator Δy e mostre que $c'(x) = f'(g(x))g'(x)$.

10. *Calcule a derivada das funções indicando o domínio de validade da expressão encontrada. Admita a seguinte tabela de derivadas:*

$$(sen)' = cos; (cos)' = -sen$$

para usar nos cálculos abaixo.

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$sen(x^2)$		$sen(cos(x))$	
$sen^2(x)$		$cos(sen(x))$	
$sen(nx)$		$cos(nx)$	
$sen(x/n)$		$cos(x/n)$	
$\frac{sen(x)}{cos(x)}$		$\frac{cos(x)}{sen(x)}$	
$\frac{1}{cos(x)}$		$\frac{1}{sen(x)}$	
$\frac{x}{cos(x)}$		$\frac{x}{sen(x)}$	
$xcos(x)$		$xsen(x)$	
$cos^2(x) + sen^2(x)$		$x^2sen(x)$	

4.6 Funções contínuas e o limite

Se f for uma função contínua,

$$f : I \to \mathbf{R}\ \text{ I é um intervalo de } \mathbf{R},$$

por definição, f preserva convergêcia, isto significa:

- Para qualquer sucessão s que represente o ponto $\underline{a}$, $f(s)$ será uma sucessão e irá representar um número no conjunto de valores de f;
- $\lim_n f(s_n) = f(\lim_{s_n})$.

As duas expressões acima são equivalentes, e você deve se convencer disto (ou formalmente se recusar ...). A segunda expressão pode ser parafraseada com a sentenção: "Se f for contínua, então podemos permutar f e o operador lim

Vamos explorar as formas de expressar a continuidade nesta seção e chegar a algumas consequências técnicas deste conceito.

Aprenda também a passar livremente da sentença

$$s \text{ respresenta o número real } a$$

para a sentença

$$\lim_n s_n = a.$$

porque elas significam a mesma coisa.

Alguns dos exercícios desta seção repetem fatos já vistos anteriormente, porém com outra forma de ver as coisas. Por exemplo, já vimos em lista de exercício anterior que os polinômios são funções contínuas. Agora este resultado volta a se apresentar como consequência dos dois primeiros resultados da próxima lista. É preciso que você se conscientize disto.

Exercícios: 42

1. *A adição é uma função contínua Mostre que se s representar o número real S e t representar o número real T então $s + t$ representa o número real $S + T$.*

2. *A multiplicação é uma função contínua Mostre que se s representar o número real S e t representar o número real T então st representa o número real ST.*

3. *Construção de funções contínuas*

   - *Mostre que se $I \xrightarrow{f} F$ e $F \xrightarrow{f} G$, I, F, G sendo tres intervalos de* $\mathbf{R}$*, se f, g forem contínuas, então $f + g$ é uma nova função contínua.*
   - *Mostre que se $I \xrightarrow{f} F$ e $F \xrightarrow{f} G$, I, F, G sendo tres intervalos de* $\mathbf{R}$*, se f, g forem contínuas, então fg é uma nova função contínua.*
   - *Mostre que os polinômios são funções contínuas.*

4. *Soma de limites*

   - *Se f, g forem duas funções contínuas definidas no intervalo $I = Dom_f = Dom_g$;*
   - *se s representa $S \in I$;*
   - *Então $\lim(f(s) + g(s)) = f(S) + g(S)$.*

5. *questão equivalente a uma outra* Se $\lim_n s_n = S$ e se f, g forem contínuas, então
$$\lim_n f(s_n) + g(s_n) = A + B \quad com \quad A = f(S); B = g(S).$$

6. *Produto de limites* Se $\lim_n s_n = S$ e se f, g forem contínuas, então
$$\lim_n f(s_n)g(s_n) = AB \quad com \quad A = f(S); B = g(S).$$

7. *Quociente de limites* Se $\lim_n s_n = S$ e se f, g forem contínuas, então
$$\lim_n f(s_n)/g(s_n) = A/B \quad com \quad A = f(S); B = g(S) \neq 0.$$

8. *A derivada é uma propriedade especializada de f*
   (a) *Se f for contínua, então*
   $$\lim_{\Delta x=0} f(a + \Delta x) - f(a) = 0$$
   (b) *Se f for contínua, então*
   $$\lim_{\Delta x=0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = A$$
   sendo o número A o coeficiente angular instâneo de f no ponto a.

   Definição: 27 *Função diferenciável Se o limite anterior existir em todos os pontos $a \in Dom_f$, diremos que f é diferenciável.*

9. *Verifique se as funções seguintes são diferenciáveis e calcule suas derivadas. Havendo pontos "problemas", identifique-os*
   a) $f(x) = (x + 3)(x + 2)$ b) $f(x) = x^2 - 1$ c) $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$

10. *Determine os limites indicados e justifique como fazer, (se você não conseguir calcular exatamente, pelo menos simplifique a expressão final até o limite possível).*
   a) $\lim_{x=5}(x + 3)(x + 2)$ b) $\lim_{x=1} x^2 - 1$ c) $\lim_{x=1} \frac{x^3-1}{x^2+1}$
   d) $\lim_{x=-1} \frac{x+3}{x-1}$ e) $\lim_{x=2} \frac{x^2-4}{x-2}$ f) $\lim_{x=1} \frac{2x^2-5x+2}{x-1}$
   g) $\lim_{h=0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h}$ h) $\lim_{\Delta x=0} \frac{(t+\Delta x)^2-t^2}{\Delta x}$ i) $\lim_{\rho=0} \frac{(y+\rho)^2-y^2}{\rho}$
   j) $\lim_{x=0} \frac{x^2-9}{x^2-2x+9}$ k) $\lim_{t=0} \frac{sen(x+t)-sen(x)}{t}$ l) $\lim_{\Delta x=0} \frac{sen(x+\Delta x)-sen(x)}{\Delta x}$
   m) $\lim_{x=0} \frac{sen(x)}{cos(x)}$ n) $\lim_{x=0} \frac{sen(x)-sen(0)}{x}$ o) $\lim_{\Delta x=0} \frac{sen(0+\Delta x)-sen(0)}{\Delta x}$
   p) $\lim_{\Delta x=0} \frac{sen(\Delta x)}{\Delta x}$ q) $\lim_{x=0} \frac{sen(x)}{x}$ r) $\lim_{\Delta x=0} \frac{cos(0+\Delta x)-cos(0)}{\Delta x}$
   s) $\lim_{x=0} \frac{cos(\Delta x)-1}{\Delta x}$ t) $\lim_{h=0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h}$ u) $\lim_{\Delta x=0} \frac{e^{x+\Delta x}-e^x}{\Delta x}$

4.7 Coeficiente angular instantâneo

A técnica básica que vamos empregar é a manipulação das duas diferenças, $\Delta x, \Delta y$. Cabe fazer algumas definições:

Definição: 28 *Quociente de diferenças*

- Δx *É um* deslocamento *considerado paralelamente ao eixo OX.*
- Δy *Dada uma função $y = f(x)$, podemos calcular a* `diferença` $\Delta y = f(a+\Delta x) - f(a)$. *A figura (fig. 4.14), página 174 mostra o significado geométrico de Δy e de Δx.*
  Δy é um deslocamento calculado ao longo do eixo OY, em função de Δx.
- *Δy e Δx são os catetos* oposto e adjacente *do ângulo agudo que a hipótenusa faz com uma paralela ao eixo OX. Ver (fig. 4.14).*
- *O quociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ é o coeficiente angular da hipotenusa do triângulo retângulo mencionado acima, ver (fig. 4.14). Como esta hipotenusa está sobre a reta secante ao gráfico de $y = f(x)$ passando nos pontos $(a, f(a)), (a + \Delta x, f(a + \Delta x))$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ é o coeficiente angular desta reta.*
  Este coeficiente angular é uma aproximação do coeficiente angular instantâneo, *a derivada $f'(a)$.*
- *A derivada, $f'(a)$, é o coeficiente angular da reta tangente no ponto $(a, f(a))$.*
- *É usando limite que conseguiremos calcular a derivada formalmente. Veja todas estas "entidades" na figura (fig. 4.14), página 174.*

Veja também os dois gráficos, (fig. 4.15) na página 175 e (fig. 4.16) na página 176. No primeiro uma sucessão de secantes se aproxima da tangente. No outro podemos ver apenas a tangente ao gráfico no ponto $(a, f(a))$.

Releia esta introdução diversas vezes até que estas idéias se tornem claras para você. Não duvide que elas são difíceis, mas absolutamente não são para gênios...

4.7.1 Coeficiente angular de retas

Exercícios: 43 *Coeficiente angular de retas*

1. *a reta $y = 2(x - 3) + 4$.*
   (a) *Faça o gráfico da reta $y = 2(x - 3) + 4$.*
   (b) *Considere um deslocamento no eixo OX, a partir do ponto a, chame-o Δx. Calcule $f(a + \Delta x)$, com $f(x) = 2(x - 3) + 4$. Calcule*
   $$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a).$$
   Represente graficamente seus cálculos. Construa, inclusive, o triângulo retângulo com catetos $\Delta x, \Delta y$ cuja hipotenusa coïncida com o segmento $\overline{(a, f(a)), (a + \Delta x, f(a + \Delta x))}$.
   (c) *Calcule o quociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.*
2. *a reta $f(x) = m(x - a) + b$.*

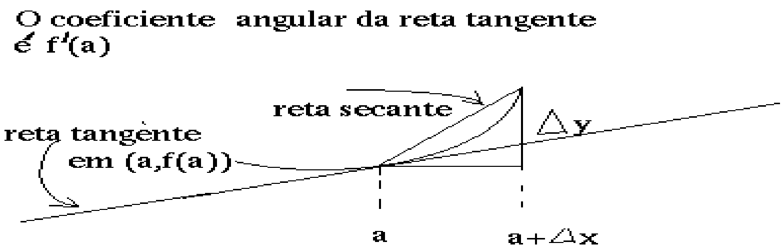

Figura 4.14: Há um triângulo retângulo de lados $\Delta x, \Delta y$ cuja hipotenusa está sobre uma secante.

(a) *Considere um deslocamento no eixo OX, a partir do ponto a, chame-o Δx. Calcule $f(a+\Delta x)$, com $f(x) = m(x-a)+b$. Calcule*

$$\Delta y = f(a+\Delta x) - f(a).$$

Represente graficamente seus cálculos.

(b) *Calcule o quociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, com as expressões calculadas na questão anterior.*

(c) *Observando que o ponto a foi tomado arbitrariamente, verifique que a conclusão é: "as retas tem coeficiente angular constante".*

4.7.2 Coeficiente angular de parábolas.

Exercícios: 44 *1. Seja $y = f(x) = x^2 - 2x + 4$.*

(a) *Considere a parábola*

$$f(x) = x^2 - 2x + 4.$$

Faça o seu gráfico.

(b) *Considere um deslocamento no eixo OX, a partir do ponto a, chame-o Δx.*

- *Calcule $f(a+\Delta x)$.*
- *Calcule $\Delta y = f(a+\Delta x) - f(a)$.*
- *Represente graficamente seus cálculos.*
- *Calcule $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ e simplifique a expressão.*

(c) *Considere $\Delta x = \frac{1}{k}$. Observe que a medida que k cresça, Δx descresce "se aproximando" de zero, portanto Δx "representa" zero. Tire disto uma conclusão sobre o* coeficiente angular instantâneo *da parábola no ponto a. Ver o gráfico (fig. 4.15), na página 175.*

(d) *Verifique no gráfico que as seguintes afirmações procedem, e identifique onde (no gráfico):*

i. *O* coeficiente angular instantâneo *depende do ponto a.*

ii. *O* coeficiente angular instantâneo *pode ser zero.*

iii. *O* coeficiente angular instantâneo *pode ser negativo. Onde será negativo? Onde será positivo ?*

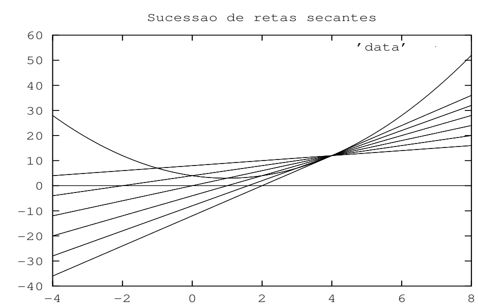

Figura 4.15: Sucessão de secantes se aproximando de uma tangente.

2. Faça com cuidado os gráficos das funções

$$f(x) = x^2 - 2x + 4 \text{ e } g(x) = 2x - 2$$

num mesmo sistema de eixos. Verifique "experimentalmente" que $g(x)$ `fornece` *o coeficiente angular instantâneo de f em cada ponto: $g = f'$. Compare com a expressão encontrada na questão anterior, para $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.*

Observação: 29 *A função derivada.*

A função g da última questão se chama de derivadada de f. <u>*Notação:*</u> $g = f'$.

O gráfico de $f(x) = x^2 - 2x + 4$ e de uma tangente a este gráfico no ponto $x = 4$ pode ser visto no gráfico (fig. , 4.16), página 176.

Programas utilizados foram a linguagem de programação Python e o Gnuplot rodando dentro de um ambiente LinuX.

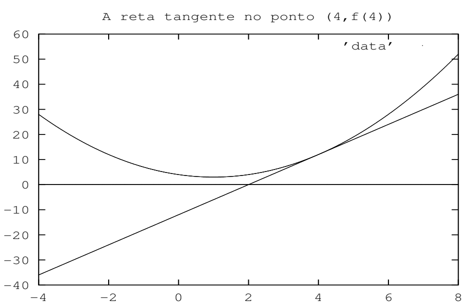

Figura 4.16: Grafico de f e de sua tangente no ponto $(4, f(4))$.

3. *Repita o estudo acima com $f(x) = x^2$ para encontrar a função derivada $g = f'$. Faça os gráficos de ambas as funções num mesmo sistema de eixos.*

4.7.3 Coeficiente angular instantâneo de outros polinômios.

Exercícios: 45 *Derivada de outros polinômios*

1. <u>$f(x) = 4x^2$.</u>

   (a) *Faça o seu gráfico de $y = f(x)$.*

   (b)
   - *Considere um deslocamento no eixo OX, a partir do ponto a, chame-o Δx. Indique no gráfico.*
   - *Calcule $f(a + \Delta x)$.*
   - *Calcule Δy; $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, simplifique a expressão encontrada.*
   - *Represente graficamente seus cálculos. Não se esqueça de colocar 4 em evidência para* entender *o que está acontencendo.*
   - *Considere agora $\Delta x = \frac{1}{k}$, uma representação de zero, e experimente com grandes valores de k para deduzir o valor de $f'(a)$.*

2. <u>*Coeficiente angular instantâneo de $f(x) = 5x^2$.*</u>

   (a) *Considere $f(x) = 5x^2$. Faça o seu gráfico.*

   (b) *Considere um deslocamento no eixo OX, chame-o Δx. Calcule $f(a + \Delta x)$. Calcule $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$. Represente graficamente seus cálculos. Não se esqueça de colocar 5 em evidência para* entender *o que está acontencendo.*

3. <u>*Coeficiente angular instantâneo de $f(x) = x^3$.*</u>

   (a) *Considere $f(x) = x^3$. Faça o seu gráfico.*

   (b) *Considere um deslocamento no eixo OX, chame-o Δx. Calcule $f(a + \Delta x)$. Calcule $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$. Represente graficamente seus cálculos.*

   (c) *Calcule $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, e simplifique a expressão encontrada. Considere $\Delta x = \frac{1}{k}$, e tire uma conclusão sobre o* coeficiente angular instantâneo *de f no ponto a quando k tiver um valor muito grande.*

4. *Verifique no gráfico que as seguintes afirmações procedem, e identifique onde (no gráfico):*

   (a) *O* coeficiente angular instantâneo *depende do ponto a.*

   (b) *O* coeficiente angular instantâneo *pode ser zero.*

   (c) *O* coeficiente angular instantâneo *pode ser negativo. Onde será negativo? Onde será positivo ?*

5. <u>*desigualdade variacional*</u> *Suponha que $y = f(x)$ seja uma função diferenciável, definida no intervalo $[a, b]$ Mostre que*

$$f'(x_0)(x - x_0) \geq 0$$

implica em exatamente uma das relações

$$a < x_0 < b \Rightarrow f'(x_0) = 0 \tag{4.21}$$

$$x_0 = a \Rightarrow f'(a) > 0 \tag{4.22}$$

$$x_0 = b \Rightarrow f'(b) < 0 \tag{4.23}$$

e reciprocamente[7].

[7] do livro de G. Stampachia - An introduction do Variational Inequalities and its applications

Solução: 11 • *$a < x_0 < b$ então $x - x_0$ pode ser positivo ou negativo então para que sempre $f'(x_0)(x-x_0) \geq 0$ a única saída é que $f'(x_0) = 0$. Reciprocamente, se $f'(x_0) = 0$ então*

$$f'(x_0)(x - x_0) \geq 0$$

- *Se $x_0 = a$ então $x - x_0 \geq 0$ então $f'(a)(x - a) \geq 0$ implica que*

$$f'(a) > 0.$$

Reciprocamente, se $f'(x_0) > 0$ então $f'(x_0)(x - x_0) \geq 0$ $x \geq x_0$ para todo valor de x o que implica que $x_0 = a$.

- *Se $x_0 = b$ então $x - x_0 \leq 0$ então $f'(b)(x - b) \geq 0$ implica que*

$$f'(b) < 0.$$

Reciprocamente, se $f'(x_0) < 0$ então $f'(x_0)(x - x_0) \geq 0$ implica que $x - x_0 < 0 \equiv x < x_0$ para todo x logo $x = b$.

——————————————————

4.7.4 Regras de derivação.

Vamos descobrir algumas regras de derivação usando os resultados obtidos nos exercícios acima.

Exercícios: 46 *Regras de derivação*

1. *Formule, a partir das experiências feitas acima, qual seria o coeficiente angular instantâneo de $f(x) = x^n$.*

2. *Complete a tabela de derivadas abaixo usando os resultados alcançados nas questões anteriores.*

f	f'
$2x$	
x	
$3x$	
$-3x$	
Ax	
$x^2 + 2x$	
$x^2 + 2x + 4$	$2x + 2$

f	f'
$Ax^2 + Bx + C$	
x^3	
x^4	
x^5	
x^6	
x^n	
$4x^3$	

f	f'
$6x^4$	$24x^3$
$2x^5$	
$7x^6$	
$2x^3$	$6x^2$
$3x^4$	
$\frac{x^4}{4}$	
Ax^n	Anx^{n-1}

Capítulo 5

A Derivada e a Integral.

Neste capítulo começaremos oficialmente o estudo das derivadas de uma forma sistematica que difere do que fizemos antes quando a derivada foi apresentada informalmente.

Em passado recente, nos cursos de Cálculo, se apresentava a derivada como um método essencial para se obter o gráfico de uma função. Hoje os gráficos de funções se podem obter com programas de computador, com muito mais eficiência. Entretanto tais gráficos *perdem sensibilidade em alguns pontos* o que nos obrigando a estudos qualitativos para detectar o comportamento dos gráfico neles. A derivada representa um desses estudos qualitativos, o mais importante, que se traduz pela análise do coeficiente angular instantâneo do gráfico de num ponto e de outras propriedades geométricas, como curvaturas ou mudanças de curvatura que um programa de computador muitas vezes não consegue ressaltar.

Mas este seria apenas um aspecto do uso da derivada. Mais importante é sua utilização na aproximação de funções em que ela se encontra no "porão" dos métodos mais avançados. O exemplo da "pedra rodando presa a um cordão" contém os rudimentos utilizados no lançamento de uma nave espacial que deva levar um satélite para entrar em órbita.

De ferramenta imediata para construir gráficos, a derivada evoluiu para se tornar numa forma mais fina de analisar o comportamento de uma função, ou para construção de uma trajetória a partir de informações colhidas por sensores, caso do satélite a ser colocado em órbita.

Também já ressaltamos que a derivada hoje é vista como uma *ordem de continuidade*: *se f for derivável então f é contínua.*

Vamos estudar técnicas de derivação junto com algumas aplicações da Derivada.

A derivada, por definição, é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$, portanto é o *limite* do coeficientes angular das secantes:

$$\lim_{\Delta x=0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x=0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Esta forma de definir, entretanto, é muito custosa sendo necessário ir em busca de regras "algébricas" que tornem o cálculo da derivada mais rápido.

<u>**Notação**</u>:

Vamos usar uma notação para simplificar o trabalho. Como estamos a todo momento trabalhando com o quociente $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ em que $\Delta x = \frac{1}{n}$ *é uma representação do zero*, então quando escrevermos $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ estaremos sempre pensando[1] em

$$\lim_{\Delta x=0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{n} \frac{f(a + \frac{1}{n}) - f(a)}{\frac{1}{n}}.$$

[1]aqui há uma particularização, deveriamos dizer $a + s_n$ em que $s = (s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ fosse uma representação qualquer do zero. Fica o alerta se você desejar ser mais preciso.

5.1 Técnicas de derivação.

Estoque de derivadas

Resumo.
Se soubermos a derivada de f e de g podemos deduzir qual é a derivada de

$$f+g \; ; \; fg \; ; \; \frac{f}{g} \; ; \; h(x)=f(g(x))$$

quando estas funções estiverem definidas. É este o assunto da presente suite de exercícios entitulada *regras de derivação.*

Exercícios: 47 *Algumas regras de derivação*

1. *derivada da função constante.*

   Verifique que se $f(x)=c$, uma constante, então o quociente $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ sempre será zero, logo $f'(x)=0$.

   Solução: 12 *Se for uma função constante, digamos $\forall\; x\;;\; f(x)=c$ então*

   $$f(x+\Delta x)=c\;;\; f(x)=c \;\Rightarrow$$
   $$\Rightarrow\;\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)=0\;\Rightarrow$$
   $$\Rightarrow\;\frac{\Delta f}{\Delta x}=0$$

   Observe que na última equação não fizemos o comentário "$\Delta x\neq 0$". Não tem sentido falar em $\Delta x=0$.

   Quer dizer que $\frac{\Delta f}{\Delta x}=0$ para qualquer que seja Δx logo

   $$\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=0$$

   Observe ainda que a expressão, $\Delta x=0$, no operador lim*, significa que Δx é uma sucessão qualquer que representa zero, e não, necessariamente o zero. Pode ser a sucessão constante zero, inclusive. São "linguagens"diferentes ...*

   ———————————————————

2. *derivada da função $f(x)=Ax+B$.*

   (a) *Calcule $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ para $f(x)=Ax+B$ e conclua que $f'(x)=A$ e que $graf(f)$ é uma reta.*

   (b) *Como as retas tem coeficiente angular constante, se o gráfico de f, $graf(f)$ for uma reta, mostre que $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=A$, uma constante, independentemente do ponto $\underline{a}$ em que foi calculada a diferença e independemente do valor de $\underline{\Delta x}$. Se a reta for paralela ao eixo OX, quer dizer que f é uma função constante, então $A=0$.*

   (c) *Deduza, usando a fórmula da equação da reta,*

   $$\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{\Delta f}{\Delta x}=A$$

   que

   $$y=f(x)=Ax+B$$

   explicitando o valor de B e verificando que ele não depende apenas do ponto $\underline{x_0}$ e não do valor de $\underline{\Delta x}$.

Você assim demontrou o teorema:

Teorema: 12 *Derivadas das funções do primeiro grau*

As funções do primeiro grau, $f(x)=Ax+B$ tem por derivada a constante $\underline{A}$ e, reciprocamente, se o gráfico de f for uma reta, sua equação é da forma $f(x)=Ax+B$ em que $\underline{A,B}$ são constantes. Se a reta for paralela ao eixo OX então $A=0$.

Solução: 13 (a) *Se $f(x)=Ax+B$ então*

$$\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)=A(x+\Delta x)+B-(Ax+B)$$
$$\Delta f=Ax+A\Delta x+B-Ax-B=A\Delta x$$
$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{A\Delta x}{\Delta x}=A$$

Logo $\frac{\Delta f}{\Delta x}=A$ é uma constante, vale A para qualquer valor de Δx logo

$$\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=A$$

quer dizer que $f'(x)=A$.

Isto ainda pode ser interpretado, geometricamente assim: "em qualquer ponto do $graf(f)$ o coeficiente angular instantâneo é o número A. Como as únicas curvas que tem coeficiente angular constante são as retas, então $graf(f)$ é uma reta.

(b) *Se o gráfico de f, $graf(f)$ for uma reta, então, em qualquer ponto seu coeficiente angular instantâneo será o mesmo:*

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=A$$

Se a reta for paralela ao eixo OX então $\Delta f=0$ logo $A=0$.

Se a reta for paralela ao eixo OY não é função da variável x e diremos que esta reta não tem coeficiente angular.

(c) *Aplicando a fórmula da equação da reta, observemos que*

$$\Delta x = x - x_0 \ ; \ \Delta f = \Delta y = y - y_0$$

portanto se $\frac{\Delta f}{\Delta x} = A$ *então*

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = A \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ y - y_0 = A(x - x_0) \ \Rightarrow \ y = Ax + y_0 - Ax_0 = Ax + B$$

O valor de $B = y_0 - Ax_0$ *depende do ponto onde passa o gráfico de* f *apenas.*

——————————————————

3. *Soma de funções. Considere duas funções* f, g *deriváveis e a soma das mesmas,* $h(x) = f(x) + g(x)$*, que é uma nova função.*

   (a) *Cálcule* $\frac{\Delta h}{\Delta x}$*. Verifique que resulta numa soma de "quocientes de diferenças", escreva explicitamente esta soma de "quocientes de diferenças".*

   (b) *Cálcule* $\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta h}{\Delta x}$*. Verifique que resulta numa soma de limites e que, portanto:*

$$h'(x) = [f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x).$$

Teorema: ***13*** *Da derivada da soma*

A derivada da soma é a soma das derivadas.

Solução: 14 *(a)*

$$\Delta h = h(x + \Delta x) - h(x) = f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x) - f(x) - g(x)$$
$$\Delta h = f(x + \Delta x) - f(x) + g(x + \Delta x) - g(x) = \Delta f + \Delta g$$
$$\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{\Delta f + \Delta g}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta g}{\Delta x}$$

(b) *Se* Δx *for uma sucessão qualquer que represente o zero (tenha limite zero), teremos à direita e à esquerda da igualdade, acima, duas sucessões iguais, portanto, se uma tiver limite, a outra também tem, o limite sendo o mesmo.*

Como à direita há uma soma de sucessões convergentes (as funções são deriváveis por hipótese) então temos sucessões definindo números reais (vale portanto que a soma dos limites é o limite da soma) e temos à direita $f'(x) + g'(x)$*.*

Como as sucessões são iguais, à direita e à esquerda na igualdade, o limite à esquerda existe e por definição é a derivada de h*,*

$$h'(x) = f'(x) + g'(x).$$

——————————————————

4. *Cálcule as derivadas das funções definidas abaixo, use*

$$(sen(x))' = cos(x) \ ; \ (cos(x))' = -sen(x).$$

a) $f(x) = sen(x) + x^2$ *b)* $f(x) = sen(x) + cos(x)$ *c)* $f(x) = x^2 + x^4$
d) $f(x) = |x| \ ; \ x \geq 0$ *e)* $f(x) = |x| + x \ ; \ x \geq 0$ *f)* $f(x) = |x| + x \ ; \ x$

5. *Produto de funções. Considere duas funções* f, g *deriváveis e o produto das mesmas,* $h(x) = f(x)g(x)$*, que é uma nova função. Assuma que* Δx *é uma sucessão qualquer que represente o zero, por exemplo:*

$$\Delta x = (\frac{1}{n})_{n \in \mathbf{N} \ ; \ n \neq 0} \ ; \ \lim_n \Delta x = 0$$

   (a) *Verifique que*

$$\lim_{\Delta x = 0} f(x + \Delta x)g(x) = f(x)g(x)$$

   (b) *Verifique que o limite seguinte é zero*

$$\Delta h - f(x + \Delta x)g(x) + f(x + \Delta x)g(x)$$

   se apenas f, g *forem contínuas no*[2] *ponto* x*.*

   (c) *Verifique que as expressões na seqüência abaixo são algebricamente equivalentes (quer dizer que você passa de uma para outra efetuando operações algébricas legais).*

$$\Delta h =$$
$$f(x + \Delta x)g(x) - f(x + \Delta x)g(x) + f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)$$
$$\Delta h = f(x + \Delta x)(g(x + \Delta x) - g(x)) + (f(x + \Delta x) - f(x))g(x)$$
$$\frac{\Delta h}{\Delta x} = f(x + \Delta x)\frac{\Delta g}{\Delta x} + \frac{\Delta f}{\Delta x}g(x)$$

   Conclua, por igualdade de sucessões que, uma tendo limite então a outra também tem, sendo a derivada do produto de duas funções diferenciávei:

$$h'(x) = (f(x)g(x))' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

Teorema: ***14*** *Derivada do produto*

Se f, b *forem funções diferenciáveis, então*

$$(f(x)g(x))' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

[2] carece de sentido a continuidade num único ponto, mas se usa esta linguagem...

6. *Sabendo que a derivada de $f(x) = sen(x)$ é $f'(x) = cos(x)$ calcule, (indicando o domínio de validade dos cálculos)*

$f(x) =$	$f'(x) =$	$f(x) =$	$f'(x) =$
$xsen(x)$		$sen^2(x)$	
$x^2sen(x)$		$(3+2x)sen(x)$	
$cos^2x + sen^2(x)$		$cos^2(x)$	
$sen(x)cos(x)$		$\frac{sen(x)}{x}$	

7. *Calcule a derivada de $h(x) = x^2(x+4)^2$, primeiro use a fórmula do teorema "produto de derivadas", depois desenvolva o produto e calcule a derivada do polinômio resultante, para comparar os resultados.*

8. *derivada da função $f(x) = x^2$. Esta função é o produto de $g(x) = x$ por ela mesma. Use a regra do produto para concluir que $f'(x) = 2x$.*

9. *derivada da função $f(x) = Ax^2$. Prove que $f'(x) = 2Ax$.*

10. *derivada da função $f(x) = Ax^2 + Bx + C$. Prove que*

$$[Ax^2 + Bx + C]' = 2Ax + B.$$

11. *A derivada de polinômios. Como polinômios são somas de monômios, verifique que suas derivadas serão somas da forma:*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \Rightarrow P'(x) = \sum_{k=0}^{n} k a_k x^{k-1}$$

12. *Derivada de $\frac{1}{g(x)}$. Considere a função g derivável e o quociente, $h(x) = \frac{1}{g(x)}$, uma nova função que está definida sempre que $g(x) \neq 0$.*

   (a) Calcule $\frac{\Delta h}{\Delta x}$

   (b) Verifique que $h'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$

   Esta fórmula na vale nos pontos em que $g(x) = 0$. Mas vale em qualquer ponto em que $g(x) \neq 0$.

13. *Quociente de funções. Considere duas funções f, g deriváveis e o quociente das mesmas, $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, que é uma nova função que está definida sempre que $g(x) \neq 0$. Verifique $h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ Esta fórmula na vale nos pontos em que $g(x) = 0$. Mas vale em qualquer ponto em que $g(x) \neq 0$.*

14. *Outro método para o quociente Observe que se $g(x) \neq 0$ então $h(x) = \frac{g(x)}{g(x)} = 1$ é o produto de duas funções:*

$$h(x) = g(x)\frac{1}{g(x)}.$$

   Use o fato de que $h'(x) = 0$ para deduzir o valor de $(\frac{1}{g(x)})'$, a derivada do quociente.

   Esta fórmula na vale nos pontos em que $g(x) = 0$. Mas vale em qualquer ponto em que $g(x) \neq 0$.

15. *Calcule as derivadas:*

   (a) $h(x) = tg(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)}$.

   (b) $h(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

16. *Estude o comportamento de $h(x)' = (\frac{x}{1+x^2})'$ isto é, analise*

   - *onde h' tem sinal constante (positivo, negativo).*
   - *quais são as raizes de $h'(x) = 0$ e que o acontece nestes pontos.*

   e deduza o gráfico de $h(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

17. *Preencha a tabela de derivadas:*

f	f'	f	f'
$3x^2 + 2x + 3$		$7x^2 - 3x^3$	
$2x - 4x^2$		$1 - 2x^2 - 2x^3$	
$x - 5x^3$		$Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2}$	
$7x^4 - 2x^3 - x$	$28x^3 - 6x^2 - 1$	$Ax^n sen(x)$	

18. *Calcule as derivadas das seguintes funções.*

a) $h(x) = \frac{x}{x+3}$	*b)* $h(x) = \frac{x^2}{(x+3)(x+1)}$	*c)* $h(x) = \frac{sen(x)}{x+3}$
d) $h(x) = \frac{1}{x+3}$	*e)* $h(x) = x^2(x+3)(x+1)$	*f)* $h(x) = \frac{1}{x}$
g) $h(x) = \frac{\lvert x\rvert}{x}$	*h)* $h(x) = \frac{1}{(x+3)(x+1)}$	*i)* $h(x) = \frac{1}{x^2}$
j)$h(x) = \frac{x^2+1}{x^3}$	*k)*$h(x) = sen(x)(x+3)$	*l)* $h(x) = \frac{1}{\lvert x\rvert}$
m) $h(x) = \frac{cos(x)}{sen(x)}$	*n)*$h(x) = \frac{x^2(x-2)}{(x+5)(x+3)(x+1)}$	*o)* $h(x) = \frac{s^2}{\lvert x\rvert}$

19. *Para cada uma das funções do item anterior, preencha uma tabela*[3] *no formato*

[3]há pontos sugeridos nesta tabela que não servem para para algumas das funções definidas na questão anterior, decida quais, substitua por outros, e justifique a razão de sua escolha.

x	valor de $f(x)$	valor de $f'(x)$
-5		
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		

e para cada item da tabela marque um ponto no plano indicando com um pequeno segmento de reta, qual é "tendência"do comportamento de f na vizinhança do ponto.

20. *Para cada uma das funções definidas abaixo*

a) $h(x) = \frac{x-3}{x+3}$	b) $h(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)}$	c) $h(x) = \frac{sen(x)}{x+3}$
d) $h(x) = \frac{x+1}{x+3}$	e) $h(x) = sen(x^2)(x+1)$	f) $h(x) = \frac{x}{sen(x)}$
g) $h(x) = \frac{\lvert x-3\rvert}{x+2}$	h) $h(x) = \frac{sen(x)}{(x+3)(x+1)}$	i) $h(x) = \frac{sen(x)}{cos(x^2)}$
j)$h(x) = \frac{x^2+1}{x^3-1}$	k)$h(x) = sen(x)cos(x)$	l) $h(x) = \frac{1}{\lvert sen(x)\rvert}$
m) $h(x) = \frac{cos(x+1)}{sen(x-2)}$	n)$h(x) = \frac{sen(x-2)cos(x)}{(x+5)(x+3)(x+1)}$	o) $h(x) = \frac{sen^2(x)}{\lvert cos(x^2)\rvert}$

preencha uma tabela no formato:

x	intervalos do domínio e pontos críticos
$f(x)$	sinal de f e valor nos pontos críticos
$f'(x)$	sinal de f', zeros de f', valor nos pontos críticos

21. *Use a informação contida nas tabelas anteriores para esboçar os gráficos das funções definidas na questão (exercício 20).*

22. *Derivada da composta - A regra da cadéia*

    (a) *Produto de diferenciais* *Considere duas funções f, g, cuja composta exista. Notação:*

$$z = h(x) = f(y) = f(g(x))$$

Justifique "algebricamente" a seqüência de identidades:

$$h(x + \Delta x) - h(x) = f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))$$
$$h(x + \Delta x) - h(x) = f(g(x) + \Delta y) - f(g(x))$$
$$\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{f(y+\Delta y)-f(y)}{\Delta x}$$
$$\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{[f(y+\Delta y)-f(y)]\Delta y}{\Delta y \Delta x}$$
$$\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta y}\frac{\Delta g}{\Delta x}$$

    (b) *Derivada da função composta* *Acrescente aos cálculos acima a hipótese: As duas funções f, g são diferenciáveis e justifique então que*

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

23. *Derivada da função composta*

    (a) *Se $f(x) = sin(x^2)$, calcule $f'(x)$.*
    (b) *Um gaz é bombeado para um balão esférico num fluxo constante (velocidade) de 50cm^3/segundo. Suponha que o balão se mantém aproximadamente esférico, calcule a velocidade com que o raio do balão está crescendo quando $r = 5\text{cm}$.*
    (c) *Derivada de $f(x) = x^\alpha$* *Use a derivada $h(x) = ln(x)$; $h'(x) = \frac{1}{x}$ para calcular a derivada de $ln(x^\alpha)$; $\alpha \neq -1$ e daí deduza*

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \; ; \alpha \neq -1$$

    (d) *Derivada da raiz quadrada* *Calcule a derivada de $f(x) = \sqrt{x} = x^{0.5}$*
    (e) *Se $x^2 + y^2 = 1$ então encontre o coeficiente angular instantâneo, no círculo, no ponto $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.*

24. *comparando crescimento*

    (a) *Considere duas funções, f, g tais que*
    - *$f(a) = g(a) = b$ os dois gráficos passam em (a, b).*
    - *$f'(a) \leq g'(a)$ a declividade de f é menor que a de g no ponto (a, b).*
    - *$x > a \;\Rightarrow\; f'(x) \leq g'(x)$.*

    Faça pelo menos um gráfico que corresponda a esta descrição. Prove que

$$\forall x \; x > a \; f(x) \leq g(x).$$

    (b) *Uma aplicação*
    Prove que: se duas crianças $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ nascerem no mesmo dia, e se a criança $\mathcal{A}$ tiver maior comprimento que a criança $\mathcal{B}$ ao nascer, então, provavelmente, na idade adulta $\mathcal{A}$ terá maior comprimento que $\mathcal{B}$.
    (c) *Outra aplicação*
    No item anterior troque "maior comprimento"por "melhores condições sociais"e enuncie o resultado que assim se pode obter.

25. *Prove as desigualdade seguintes e, em cada caso, faça os gráficos das funções f, g.*

    (a) $3(x - 2) \leq 4(x - 2) \quad \Leftarrow \quad x > 2.$

(b) $x^2 \leq x^3 \quad \Leftarrow \quad x > 0$.

(c) $sen(x) \leq x \quad \Leftarrow \quad x > 0$.

(d) $1 - cos^2(x) \leq x \quad \Leftarrow \quad x > 0$.

Sugestão, use o (exercício, 24a).

26. *Prove que a cadéia de desigualdades seguintes vale:*

$$\sqrt{\frac{1 - cos^2(x)}{x}} = \frac{\sqrt{1 - cos^2(x)}}{\sqrt{x}} \leq \frac{sen(x)}{\sqrt{x}} \leq \frac{sen(x)}{x} \leq 1$$

se $0 < x \leq 1$. *Sugestão: se inspire em exercício anterior.*

5.2 Análise do gráfico de uma função.

Resumo.

Já sabemos, na prática, que o gráfico de uma parábola é uma curva com a abertura voltado para cima ou para baixo. A seguinte suite de exercícios conduz à demonstração deste resultado.

Vamos mais além aqui, desembocaremos no Teorema Fundamental da Álgebra, sem demontrá-lo, que determina o número máximo de soluções de uma equação polinomial.

Neste exercícios estamos analisando, de forma fina, gráficos feitos por computador nos capítulos anteriores.

Exercícios: 48 *Gráficos de parábolas*

1. *Prove que a derivada de* $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ *se anula em único ponto* $x = \frac{-B}{2A}$.

2. *Verifique que o ponto extremo da parábola é o ponto médio das raizes (mesmo que elas não existam como números reais):*

$$\frac{x' + x''}{2} = \frac{-B}{2A}.$$

3. *Para cada uma das funções abaixo*

$$a)\ y = x^2 + 3x + 7 \quad b)\ y = 5 - 3x - 8x^2 \quad c)\ y = x^2$$

   (a) *calcule suas derivadas e determine o ponto em que a derivada se anula em cada caso;*

   (b) *calcule o ponto de mínimo sem usar as raizes;*

   (c) *use estas informações para fazer um esboço gráfico de cada uma das funções.*

4. <u>*crescimento e derivada*</u> *Como a derivada de* $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ *é uma reta, verifique que*

   (a) *Se* $A > 0$ *então* f *primeiro decresce até o ponto* $x = \frac{-B}{2A}$ *e depois cresce a partir deste ponto.*

   (b) *Se* $A < 0$ *então* f *primeiro cresce até o ponto* $x = \frac{-B}{2A}$ *e depois decresce a partir deste ponto.*

   e conclua que,

   - *Se* $A > 0$ *a parábola* $y = f(x)$ *tem a abertura para cima; Consequentemente a parábola passa por um mínimo no ponto* $x = \frac{-B}{2A}$.
   - *Se* $A < 0$ *a parábola* $y = f(x)$ *tem a abertura para baixo; Consequentemente a parábola passa por um máximo no ponto* $x = \frac{-B}{2A}$.

   Aplique esta análise a cada uma das funções abaixo

$$a)\ y = x^2 + 3x + 7 \quad b)\ y = 5 - 3x - 8x^2 \quad c)\ y = 4 - x^2$$

5. *Para cada uma das funções acima, determine os dois intervalos de* $\mathbf{R}$ *em que ela cresce ou decresce, e com esta informação faça os gráficos das funções.*

6. *miniMax Enuncie um teorema associando os pontos de máximo ou de mínimo de uma função com os zeros da derivada.*

7. *Faça os gráficos de*

$$a) y = x^2 - 3x - 7 \quad b)\ y = -5 - 3x - 8x^2 \quad c)\ y = -4 - x^2$$

8. *Se* $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, *prove que o ponto* x, *tal que* $f'(x) = 0$, *é o ponto médio das raizes, (quer elas sejam reais ou complexas...).*

9. *Calcule o ponto médio das raizes das parábolas abaixo e confirme nos gráficos feitos*

$$a) y = x^2 - 9 \quad b)\ y = -6 - 5x + x^2 \quad c)\ y = -4x - x^2$$

10. *Derivada e primitiva*

    (a) *Calcule a derivada de* $f(x) = Ax^2 + Bx + C$.

    (b) *Calcule o ponto médio das raizes de*

    $$Ax^2 + Bx + C = 0$$

    (c) *Calcule a equação de*

    $$G(x) = \int_{-\frac{B}{A}}^{x} 2Ax + B$$

    usando integração geométrica (observe qual é o significado geométrico do ponto $-\frac{B}{A}$*).*

    (d) *Deduza uma fórmula associando* f, f' *via integral.*

11. *Função do terceiro grau*

    Seja $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$. *Determine o número máximo de pontos tal que* $f'(x) = 0$.

    (a) *Especifique este resultado nos seguintes casos:*

    $$a) y = x^3 + 3x + 7 \quad b)\ y = 5x - 3x^2 - 8x^3 \quad c)\ y = 8 - x^3$$

    (b) *Para cada uma das funções acima, identifique se os pontos em que a derivada se anula é um ponto de máximo ou um ponto de mínimo.*

    (c) *Determine em que caso para* $y = f(x)$ *definida acima, quando a função é crescente ou decrescente, onde ela tem* máximo *ou* mínimo *relativos e use estas informações para fazer os seus gráficos.*

12. *Teorema Fundamental da Álgebra*

    Dada uma função polinômial f, *a análise dos zeros de sua derivada* f' *pode conduzir à determinação dos zeros de* f.

    Considerando que, se $f'(a) = 0$ *então o gráfico de* f *tem uma tangente horizontal no ponto* $(a, f(a))$, *este fato geométrico permite um esboço do gráfico de* f, *localmente se pudermos determinar em caso:*

    - *ponto de* máximo,
    - *ponto de* mínimo,
    - *ponto de* inflexão,

    se classifica o ponto $(a, f(a))$.

    (a) *Considere uma função polinômial,* f, *do terceiro grau. Suponha que sua derivada se anule nos pontos* $x = a, x = b$. *Observe que* $x = a = b$ *é um desses casos.*

    Encontre todas as possibilidades de relação que existam entre

    $$a, b, f(a), f(b), f'(a), f'(b)$$

    (considerando desigualdade e sinal) e para cada uma delas esboce o gráfico de f. *Por exemplo, abaixo se encontra uma possiblidade ilegal*

    $$a < b; f(a) < f(b).$$

    Justifique por que é ilegal e determine todas as possiblidades legais e os correspondentes esboços gráficos.

    Resposta: existem 2 classes de gráficos, com 3 ou 1 possibilidades de raizes.

    (b) *Considere uma função polinômial,* f, *do quarto grau. Determine todas as possibilidades de gráficos a partir da analise dos zeros de sua derivada.*

    Resposta: existem 3 classes de gráficos com 3, 2 1 possibilidade de raizes.

    (c) *Teorema Fundamental da Álgebra Enuncie a hipótese de indução que ficou delineada nos itens anteriores, para uma função polinomial do grau n. Enuncie o Teorema que fica sugerido pela sequência de questões que estabelece o número de raizes de uma equação polinomial de grau n.*

13. *Gráfico de uma função Seja* f *uma função diferenciável em um sub-intervalo da reta. Justifique as afirmações seguintes:*

(a) *A raizes da derivada f' indicam os pontos em que f tem uma tangente horizontal.*

(b) *Os zeros da segunda derivada de f'' indicam os pontos em que f, altera de "crescimento para decrescimento" ou vice-versa. Isto é, se $f''(a) = 0$*

- *se f era crescente em $x < a$ então f passara a decrescente em $x > a$;*
- *se f era decrescente em $x < a$ então f passara a crescente em $x > a$;*

(c) *Trace minuciosamente, (à mão !) o gráfico da função*

$$f(x) = 24 - 10x - 15x^2 + x^4$$

primeiro calculando f', f'' e fazendo as análise das raizes das derivadas. Determine os intervalos onde f, f' crescem ou decrescem para deduzir o gráfico de f. Confira o resultado definindo f em Gnuplot e executando

gnuplot
$> f(x) = 24 - 10*x - 15*x**2 + x**4 >$ *set pointsize 0.1*
$>$ *plot* $f(x), 0$
$>$ *pause -2*
$>$ *<enter>*
$>$ *quit*

Gnuplot é um programa de domínio público voltado para fazer gráficos de funções (e dados) uni e multi variado. Existe até mesmo uma versão do Gunplot para DOS ou Windows mas não podemos garantir que estas versões funcionem bem. Usamos Gnuplot sob LinuX.

5.3 Cálculo de derivadas e gráficos de funções.

1. Calcule as derivadas das seguintes funções.

a) $h(x) = \frac{x}{x+3}$	b) $h(x) = \frac{x^2}{(x+3)(x+1)}$	c) $h(x) = \frac{sen(x)}{x+3}$
d) $h(x) = \frac{1}{x+3}$	e) $h(x) = x^2(x+3)(x+1)$	f) $h(x) = sen(x)(x+3)$
g) $h(x) = \frac{1}{x}$	g) $h(x) = \frac{1}{(x+3)(x+1)}$	i) $h(x) = \frac{1}{x^2}$
j) $h(x) = \lvert x\rvert$	k) $h(x) = \frac{\lvert x\rvert}{x}$	l) $h(x) = \frac{1}{\lvert x\rvert}$
m) $h(x) = \frac{cos(x)}{sen(x)}$	n) $h(x) = \frac{x^2+1}{x^3}$	o) $h(x) = \frac{s^2}{\lvert x\rvert}$

2. Para cada uma das funções do item anterior, preencha uma tabela[4] no formato

x	valor de $f(x)$	valor de $f'(x)$
-5		
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		

e para cada item da tabela marque um ponto no plano indicando com um pequeno segmento de reta, qual é "tendencia"do comportamento de f na vizinhança do ponto.

3. Para cada uma das funções definidas na primeira questão, preencha uma tabela no formato

x	intervalos do domínio e pontos críticos
$h(x)$	sinal de f e valor nos pontos críticos
$h'(x) =$	sinal de f', zeros de f', valor nos pontos críticos

   - a) $h(x) = \frac{x}{x+3}$
   - g) $h(x) = \frac{1}{x}$
   - j) $h(x) = \frac{cos(x)}{sin(x)}$

4. Use a informação contida nas tabelas anteriores para esboçar os gráficos das funções definidas na primeira questão.

5. comparando crescimento Considere duas funções, f, g tais que

   - $f(a) = g(a) = b$ os dois gráficos passam em (a, b).
   - $f'(a) \le g'(a)$ a declividade de f é menor que a de g no ponto (a, b).
   - $x > a \Rightarrow f'(x) \le g'(x)$.

   Faça pelo menos um gráfico que corresponda a esta descrição. Prove que

   Teorema: 15 *Desigualdade e derivadas.* $\forall x\ x > a\ f(x) \le g(x)$.

6. Prove as desigualdade seguintes e cada caso faça os gráficos das funções f, g.

   (a) $3(x-2) \le 4(x-2) \quad \Leftarrow \quad x > 2$.
   (b) $x^2 \le x^3 \quad \Leftarrow \quad x > 0$.
   (c) $sen(x) \le x \quad \Leftarrow \quad x > 0$.
   (d) $1 - cos^2(x) \le x \quad \Leftarrow \quad x > 0$.

[4]há pontos sugeridos nesta tabela que não servem para para algumas das funções definidas na questão anterior, decida quais, substitua por outros, e justifique a razão de sua escolha.

7. Prove que a cadéia de desigualdades seguintes vale:
$$\sqrt{\frac{1-cos^2(x)}{x}} = \frac{\sqrt{1-cos^2(x)}}{\sqrt{x}} \leq \frac{sen(x)}{\sqrt{x}} \leq \frac{sen(x)}{x} \leq 1$$
se $0 < x \leq 1$.

5.4 Números complexos e trigonometria.

As funções trigonométricas oferecem uma dificuldade especial que é preciso não desprezar: elas tem uma *definição geométrica* e nós precisamos trabalhar com suas *propriedades algébricas*. As pontes para saltar sobre este fosso são muito exíguas e dependem de uma arte secular...
Um pouco de números complexos ajuda a criar um método para redescobrir, quando necessário, as fórmulas dos arcos-soma, faremos isto na primeira seção que você pode saltar se julgar desnecessário.

1. Efetue e represente geometricamente no plano:

a) $(2+3i)+(3+2i)$	b) $(a+bi)+(c+di)$
c) $(2+3i)(3+2i)$	d) $(2+3i)(2-3i)$
e) $\|(2+3i)\|$	f) $\|(cos(\theta)+isen(\theta)\|$
g) $(a+bi)+(-a-bi)$	h) $(cos(\theta)+isen(\theta)(cos(\alpha)+isen(\alpha))$

2. Notação de Euler:
$$cos(\theta)+isen(\theta) = e^{i\theta}$$
Prove geometricamente que
$$e^{i\theta}e^{i\alpha} = (cos(\theta)+isen(\theta))(cos(\alpha)+isen(\alpha)) = \quad (5.1)$$
$$cos(\theta+\alpha)+isen(\theta+\alpha) = e^{i(\theta+\alpha)}; \quad (5.2)$$
use distância entre dois pontos e semelhança de triângulos ao representar $e^{i\theta}, e^{i\alpha}, e^{i(\theta+\alpha)}$ no plano.

5.5 Derivada das funções trigonométricas.

Acompanhe a leitura escrevendo nas margens[5] indicativos de como foram feitas cada uma das passagens, faz parte do exercício fazê-lo. Queremos calcular o limite do quociente de diferenças
$$\lim_{h=0} \frac{sen(a+h)-sen(a)}{h}$$
e sabemos[6] que
$$sen(a+h) = cos(a)sen(h)+cos(h)sen(a)$$

[5]como se diz que Fermat fez um dia, de forma incompleta, por falta de espaço...
[6]não se deixe intimidar por frases autoritárias como esta, "sabemos...", se você não souber, pergunte, e depois escreva aqui no texto como foi feito...

portanto:
$$\lim_{h=0} \frac{cos(a)sen(h)+cos(h)sen(a)-sen(a)}{h}$$
esta fração se pode dividir em duas:
$$\lim_{h=0} \frac{cos(a)sen(h)}{h} + \frac{cos(h)sen(a)-sen(a)}{h}.$$
Se conseguissemos provar que
$$\lim_{h=0} cos(a)\frac{sen(h)}{h}, \lim_{h=0} sen(a)\frac{cos(h)-1}{h}.$$
existem, então o limite será a soma[7]:
$$\lim_{h=0} \frac{cos(a)sen(h)}{h} + \lim_{h=0} \frac{cos(h)sen(a)-sen(a)}{h}.$$
Este é objetivo dos exercícios seguintes. O teorema seguinte será usado.

Teorema: 16 *<u>teorema do sanduiche</u> Se tivermos tres expressões*
$$f_1(h), f_2(h), f_3(h)$$
e soubermos que:

- $f_1(h) \leq f_2(h) \leq f_3(h)$
- $\lim_{h=0} f_1(h) = \lim_{h=0} f_3(h)$

então $\lim_{h=0} f_2 = \lim_{h=0} f_1 = \lim_{h=0} f_3$.

1. Represente no círculo trigonométrico o arco h e $sen(h)$ e prove que:
   (a) $\frac{sen(h)}{h} \leq \frac{h}{h} = 1$
   (b) $hcos(h) \leq sen(h)$ (sugestão compare as derivadas no ponto $h = 0$ e os valores das funções neste ponto.)
   (c) $cos(h) \leq \frac{sen(h)}{h} \leq 1$
   (d) Considere $h = (\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ e conclua que
   $$\lim h = 0 cos(h) = \frac{sen(h)}{h} = 1$$
   e portanto, pelo teorema[8] do sanduiche, $\lim_{h=0} \frac{sen(h)}{h} = 1$.

2. Queremos mostrar que $\lim_{h=0} \frac{cos(h)-1}{h} = 0$. Duas opções:

[7]pelo teorema da soma de limites
[8]acrescente ao gráfico o arco do círculo de raio $cos(\theta)$

- comparação das derivadas a partir do ponto $h = 0$, 15 página 193.
- Use a fórmula fundamental $cos^2(h) - 1 = sen^2(h)$, para encontrar uma fatoração do númerador[9].

3. Com $f(x) = sen(x)$, calcule $\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$. Usando a fórmula do arco-soma, fatore Δf e mostre que
$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = cos(a).$$

Observação: 30 *Derivada do seno. Os exercícios acima demonstraram:*

Teorema: ***17*** *da derivada do sen. Se $f(x) = sen(x)$ então $f'(x) = (sen(x))' = cos(x)$.*

4. Como sen, cos são funções periódicas, com mesmo período e mesmos valores apenas defasadas, mostre, geometricamente, que uma é uma translação da outra:
$$sen(x) = cos(x - \frac{\pi}{2}) \equiv cos(x) = sen(x + \frac{\pi}{2})$$

Observação: 31 *Derivada da função composta. Vemos que $cos(x) = f(g(x)) = sen(g(x))$; $g(x) = x + \frac{\pi}{2}$, isto sugere pensarmos num método de derivação para o caso da função composta, e ele existe, e é fácil de explicá-lo simbolicamente:*

Chame $h(x) = f(g(x))$. Queremos calcular o limite $\lim\limits_{\Delta x=0} \frac{\Delta h}{\Delta x}$. Veja o que as seguintes "contas"sugerem:

$$\Delta h = h(a + \Delta x) - h(a) = f(g(a + \Delta x)) - f(g(a)) = \Delta f \quad (5.3)$$
$$g(a + \Delta x) - g(a) = \Delta g \neq 0 \ \ \textbf{hipótese 1} \quad (5.4)$$
$$\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{\Delta f \Delta g}{\Delta g \Delta x} \quad (5.5)$$
$$\lim_{\Delta x=0} \frac{\Delta g}{\Delta x} \ \textit{existe} \ ; \ \textbf{hipótese 2} \quad (5.6)$$

*Como queremos encontrar uma regra de derivação para a função $h(x) = f(g(x))$, nos baseando no fato de que as duas funções f, g são deriváveis, então a "***hipótese 2*** *acima é satisfeita e podemos usar a sugestão das contas acima para calcular:*

$$\lim_{\Delta x=0} \frac{\Delta h}{\Delta x} = \lim_{\Delta x=0} \frac{\Delta h \Delta g}{\Delta g \Delta x} \quad (5.7)$$
$$\lim_{\Delta x=0 \equiv \Delta g=0} \frac{\Delta h}{\Delta g} \lim_{\Delta x=0} \frac{\Delta g}{\Delta x} \quad (5.8)$$
$$(5.9)$$

estes limites da última equação, são as derivadas de f e de g, encadeadas *demonstrando o teorema:*

[9] multiplique númerador e denominador por $(cos(h) + 1)$.

Teorema: ***18*** *Regra da cadéia. Se f, g forem funções deriváveis, então a função composta $h(x) = f(g(x))$ será também derivável e temos:*
$$h'(a) = f'(g(a))g'(a)$$

5. derivada do coseno Deduza do anterior que
$$(cos(x))' = (sen(g(x))' = cos(g(x))g'(x) = cos(x + \frac{\pi}{2}) = -sen(x)$$

6. Calcule as derivadas das seguintes funções:

a) $h(x) = sen(x)cos(x)$	b) $h(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)}$	c)$h(x) = \frac{cos(x)}{sen(x)}$
d) $h(x) = xsen(x)$	e) $h(x) = x^2 sen(x)$	f) $h(x) = x^2 cos(x)$
g) $h(x) = \frac{x}{sen(x)}$	h) $h(x) = \frac{sen(x)}{xcos(x)}$	i) $h(x) = \frac{sen(x)}{x^2 cos(x)}$
j) $h(x) = sen(cos(x))$	k) $h(x) = sen(x^2)$	l) $h(x) = cos(x^2)$
m) $h(x) = cos^2(x)$	n) $h(x) = cos^3(x)$	o) $h(x) = cos^n(x)$
p) $h(x) = sen^2(x)$	q) $h(x) = sen^3(x)$	r) $h(x) = sen^n(x)$

7. integração geométrica Prove geométricamente:

(a) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} sen(x) = 0$

(b) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} sen(x) = 0$

(c) $\int\limits_{0}^{\pi} sen(x) = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos(x)$

(d) $\int\limits_{0}^{\pi} sen^2(x) = \int\limits_{0}^{\pi} cos^2(x)$

8. Deduza da relação fundamental $cos^2(x) + sen^2(x) = 1$ que

a) $\int\limits_0^{\pi} sen^2(x) + cos^2(x) = \pi$ b) $\int\limits_0^{\pi} sen^2(x) = \frac{\pi}{2}$ c) $\int\limits_0^{\pi} cos^2(x) = \frac{\pi}{2}$

9. Calcule também, (represente geométricamente) as áreas calculadas):

a) $\int\limits_0^{2\pi} sen^2(x) + cos^2(x)$	b) $\int\limits_0^{2\pi} sen^2(x)$	c) $\int\limits_0^{2\pi} cos^2(x)$
d) $\int\limits_{-2\pi}^{2\pi} sen^2(x) + cos^2(x)$	e) $\int\limits_{-2\pi}^{2\pi} sen^2(x)$	f) $\int\limits_{-2\pi}^{2\pi} cos^2(x)$

5.6 A derivada de funções racionais

Exercícios: 49 1. *Considere a função $y = f(x) = \frac{1}{x}$. Para uma valor* arbitrário *de Δx calcule*

$$\Delta y, \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Considerando $\lim_{\Delta x=0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, deduza que a equação da função derivada de f é:

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2}.$$

2. *Equação da reta tangente*

   (a) *Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$ no ponto $(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}))$.*

   (b) *Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$ no ponto $(1, f(1))$.*

   (c) *Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$ no ponto $(-1, f(-1))$.*

   (d) *Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$ no ponto $(2, f(2))$.*

   (e) *Faça o gráfico da função $y = f(x) = \frac{1}{x}$ no mesmo gráfico os das retas tangente cujas equações foram encontrada acima.*

   (f) *Considere $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$. Conclua que que para esta função vale a regra da derivação polinomial que já encontramos anteriormente.*

3. *Derivada de $f(x) = \frac{1}{x^2}$*

   (a) *Para uma valor* arbitrário *de Δx calcule*

   $$\Delta y, \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

   Considerando $\lim_{\Delta x=0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, deduza que a equação da função derivada de f é:

   $$f'(x) = \frac{-2}{x^3}.$$

   (b) *Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \frac{1}{x^2}$ no ponto $(-1, f(-1))$.*

   (c) *Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \frac{1}{x^2}$ no ponto $(2, f(2))$.*

   (d) *Considere $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$. Conclua que que para esta função vale a regra da derivação polinomial.*

4. *Estenda a regra de derivação polinomial para*

   $$f(x) = x^m \ ; \ m \in \mathbf{Z}.$$

5. *Considere dois números inteiros p, q e as funções $f(x) = x^p; g(x) = x^q$.*

   (a) *Calcule a derivada de $h(x) = g(f(x))$.*

   (b) *Determine quando f é a função inversa de g.*

6. *Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de*

   $$f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$$

   no ponto $(1, f(1))$. Faça o gráfico da tangente e deduza daí um segmento do gráfico de f nas vizinhanças do ponto de tangência.

7. *Faça uma tabela de derivadas contendo os pares de funções f, f' cujas derivadas você já conheça.*

5.7 Diferenciação e equações paramétricas

> Vamos aqui introduzir, e depois passar a usar, a notação de Leibniz para derivadas.
> Com auxílio desta notação vamos definir um processo de derivação mais flexível que se aplica a fórmulas "não funcionais", a derivação implícita.
> Vamos discutir o conceito "diferencial", também.

Vamos considerar a equação do cículo, $x^2 + y^2 = r^2$, e se explicitarmos y nesta equação, vamos ter:

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$$

em que, para cada valor de x correspondem dois valores de y destruindo a unicidade da imagem no conceito de função. Houve um tempo em que isto era tomado como natural, nas funções se podia ter mais de uma imagem para cada valor do domínio, eram chamadas algumas vezes de funções "plurívocas". Depois se concebeu o conceito de funções "unívocas" e as "funções plurívocas" passaram a ser chamadas de "relações".

Mas podemos sempre transformar qualquer "função plurívoca" em uma função de verdade, e vamos fazé-lo com a equação do círculo como exemplo.

As "funções plurívocas" são apenas funções mal definidas. Por exemplo o círculo, o seu comjunto de chegada, natural, é o plano, o $\mathbf{R}^2$. E o seu parâmetro natural, é ângulo "que cada ponto" faz[10] com o eixo do OX.

Cada ponto sobre o círculo $r\mathbf{S}^11$ determina com a origem um segmento de reta e este determina um ângulo positivo (a menos de uma volta completa), com o eixo OX. As projeções deste sementos nos eixos OX, OY são:

$$x = rcos(\theta) \ ; \ y = rsen(\theta).$$

O modelo abstrato do que fizemos é:

Equações paramétricas

1. Verificamos que a relação representa uma função plurívoca em um espaço de dimensão n, no presente exemplo $n = 2$.

[10] Claro que a linguagem está geométricamente incorreta, ponto não determina ângulo. No presente caso sim...

2. Construimos uma coleção de funções

$$x_1 = f_1(\theta) \; ; \; \cdots x_n = f_n(\theta)$$

3. Algumas vezes precisaremos de mais de uma "variável" para descrever os pontos do domínio, mas não trataremos desta questão neste livro.

5.8 A derivação implícita

Iniciaremos com a equação do círculo caminhando no sentido da derivada.

Com o cículo definido por uma equação como $x^2 + y^2 = r^2$ o conceito de derivada que estamos usando desde o capítulo 1, fica fora da prática. Num determinado ponto $x \in [-r, r]$ temos sempre "dois coeficientes angulares instantâneos" o que é absurdo, porque a expressão

$$x^2 + y^2 = r^2$$

não é "funcional".

Isto mostra que o parâmetro adequado para pensar no círculo não é um ponto $x \in [-r, r]$, que é a projeção do círculo sobre OX mas sim o ângulo: *se estivermos rodando uma pedra em um cordão, queremos saber com que ângulo devemos soltar o cordão* para que a pedra se encaixe perto de um "cacho de mangas" ver "a pedra que parte pela tangente, figura 1.13 na página 22".

O ângulo faz referência às duas coordenadas:

$$\theta \to (x, y) = (rcos(\theta), rsen(\theta))$$

e agora, sim, a cada ângulo corresponde um único ponto em cima círculo. A relação

$$\theta \mapsto= (rcos(\theta), rsen(\theta)) = (x(\theta), y(\theta))$$

é uma função.

Um método de derivação, chamado de *derivação implícita* se serve muito bem para equações como a equação implícita do círculo para liberar a derivada. Derivamos tudo, todas as variáveis:

derivação implícita

$$x^2 + y^2 = r^2 \;\; \Rightarrow \;\; 2xdx + 2ydy = 0$$

e aqui surge um símbolo que os antigos usavam para substituir a frase "em relação a". Quer dizer que

$$2xdx$$

deve ser lido "*é a derivada de x^2 em relação à variável x*".

Depois, com o passar do tempo, a notação dx terminou se incorporando em outros conceitos e hoje nós a podemos entender, numa concepção mais geral, que aos poucos irá ficar mais clara. Mas neste momento entenda-a como a frase acima.

Primeira regra, $dx \neq x$, ou dito com mais ênfase: "ds nada tem o que ver com x, é uma outra variável e tem autores que inclusive escrevem a expressão da derivada da derivada implícita assim:

$$x^2 + y^2 = r^2 \;\; \Rightarrow \;\; 2xh + 2yk = 0 \; ; \; h \in OX, k \in OY$$

Tem gente que complica tanto as coisas que inclusive diz que temos dois espaços em questão, (que não deixa de ser verdadeiro), mas neste momento tudo se passa "como se dx indicasse relativamente a quem estamos derivando".

Agora, a cada ponto (a, b) do círculo, considere a, b como constantes dadas, satisfazendo a equação do círculo de centro na origem e raio r, podemos obter a equação duma reta:

$$2ah + 2bk = 0 \qquad (5.10)$$

$$\text{ou equivalentemente} \qquad (5.11)$$

$$2adx + 2bdy = 0 \qquad (5.12)$$

$$2a(x - a) + 2b(y - b) = 0 \qquad (5.13)$$

e podemos interpretar "dx" e "dy" como as diferenças

$$dx \equiv x - a \; ; \; dy \equiv y - b$$

para obter a equação de uma reta a partir da derivação implícita. Temos assim uma nova interpretação para os "mágicosdx", "dy" de Leibnitz.

Podemos agora explicitar dy para ter

$$dy = -\frac{x}{y}dx \qquad (5.14)$$

e se nós calcularmos a derivada de $y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ usando a `regra da cadéia` vamos ter

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{-x}{y}$$

observando que $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

Quer dizer que na equação (eq. 5.14) temos:

$$dy = f'(x)dx$$

o que motivou Leibnitz a escrever:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

que é uma fração perfeita no sentido de quociente de limites. Chegamos assim a mesma expressão por dois caminhos.

Se tivermos uma expressão genérica, $z = f(x,y)$ pode ser impossível escrever y como função de x mas pode ser fácil escrever $dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx$ de onde podemos calcular

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

a derivada de f relativamente a x, ou ainda a derivada de uma curva, dentro da imagem de f relacionando x, y funcionalmente.

5.9 Reta tangente, plano tangente

Podemos aplicar a derivação para obter objetos tangentes aos gráficos de curvas e superfícies.

Considere

$$[a,b] :\xrightarrow{F} \mathbf{R}$$

uma função diferenciável, o que significa que o $graf(F)$ tem uma reta tangente em cada um dos seus pontos

$$y = f(c) + f'(c)(x-c) \iff y - f(c) = f'(c)(x-c)$$

em que você pode reconhecer a expressão, estudada na *Geometria Analítica*, da equação de uma reta

$$\text{que passa no ponto } (c,d) d = f(c) \tag{5.15}$$
$$\text{que tem coeficiente angular } m = f'(c) \tag{5.16}$$
$$y - b = m(x-a) \tag{5.17}$$

Exercícios: 50 *Reta tangente*

1. *Escreva a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = xsen(x) + 2 * sen(x) + 3$ no ponto $(a, f(a))$ quando $a = 3.1415$ e obtenha o gráfico.*

   Solução: 15 *Com* gnuplot

```
gnuplot> f(x) = x*sin(x) + 2*sin(x) + 3
gnuplot> a = 3.1415
gnuplot> df(x) = sin(x) + x*cos(x) + 2*cos(x)
gnuplot> c = 3.1415
gnuplot> reta(x) = f(c) + df(c)*(x -c )
gnuplot> plot f(x), reta(x),0
```

——————————————————

2. *Derive implicitamente $x^2 + y^2 = r^2$ e encontre a equação da reta tangente ao ponto (a,b) no círculo de raio r e centro na origem. Escolha o ponto (a,b).*

Solução: 16 *Escolhendo valores $a = 1, r = 2$*

$$a = 1r = 2 \Rightarrow 1 + b^2 = 4 \Rightarrow b = \pm\sqrt{3}$$
$$b = \sqrt{3}$$
$$2xdx + 2ydy \ ; (a,b) = (1, \sqrt{3})$$
$$2a(x-a) + 2b(y-b) \Rightarrow 2(x-1) + 2\sqrt{3}(y-\sqrt{3}) \quad y = -\frac{a}{b}(x-a) + b$$

Com gnuplot

```
gnuplot> f(x) = (4 - x**2)**0.5
gnuplot> reta(x) =  b  - (a/b)*(x - a)
gnuplot>  a = 2
gnuplot> b = f(a)
gnuplot> plot f(x), reta(x), 0
gnuplot> a = 0.5
gnuplot> b = f(a)
gnuplot> plot f(x), reta(x), 0
```

——————————————————

3. *Considere $F(x,y) = x^2 + 3xy + xy^3 = 4$*
   (a) *Derive implicitamente esta expressão e encontre a equação da reta tangente ao ponto (a,b). Escolha o ponto (a,b), com $b = 1$;*
   (b) *Considere uma malha de norma 0.5 na região $[-5,5]$ x $[-5,5]$ e desenhe em cada nó desta malha um segmento de reta de comprimento 0.5 com o coeficiente angular da reta tangente a $F(x,y) = 4$.*

Solução: 17 *(a) Não é possivel explicitar y nesta expressão. Mas a derivada implícita vai nos conduzir a uma equação linear:*

$$y = 1 \Rightarrow x^2 + 3xy + xy^3 = x^2 + 3x + x = x^2 + 4x = 4 \tag{5.22}$$
$$x = -2 \pm \sqrt{2} \tag{5.23}$$
$$(a,b) \in \{(-2+\sqrt{2}, 1), (-2-\sqrt{2}, 1)\} \tag{5.24}$$
$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 3y + y^3 \ ; \ \frac{\partial F}{\partial y} = 3x + 3xy^2 \tag{5.25}$$
$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = (2x + 3y + y^3)dx + (3x + 3xy^2)dy = 0 \tag{5.26}$$
$$(2a + 3b + b^3)(x-a) + (3a + 3ab^2)(y-b) = 0 \tag{5.27}$$
$$2\sqrt{2}(x-a) + 6(-2+\sqrt{2})(y-b) = 0 \tag{5.28}$$
$$2\sqrt{2}(x+2-\sqrt{2}) + 6(-2+\sqrt{2})(y-1) = 0 \tag{5.29}$$
$$y = b + \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}(x-a) \tag{5.30}$$
$$y = 1 - \frac{2\sqrt{2}}{6(-2+\sqrt{2})}(x+2-\sqrt{2}) \tag{5.31}$$
$$y = 1 - \frac{1}{3(-\sqrt{2}+1)}(x+2-\sqrt{2}) \tag{5.32}$$

(b) O seguinte programa em Python resolve questões deste tipo. As equações tem ser atualizadas no programa

```
#! /usr/bin/python
##  try -  leitura de dados - dados padrao - dados default
##  Com try: except: (empty except) podemos ler dados default
from posix import popen
import sys



###  Atualizar os DADOS AQUI  #####
##  Troque aqui as equacoes de  f  e  f' = df

def f(x,y):
return x**2 + 3*x*y +  x*y**3

def fx(x,y):
from math import *
x = float(x); y = float(y)
return 2*x + 3*y + y**3

###  Atualizar os DADOS AQUI  #####
##  Calcule a derivada algoritmicamente ! nao use aproximacao
def fy(x,y):
from math import *
x = float(x); y = float(y)
return 3*x + 3*x*y**2


from math import sin, cos, atan
print("=============  Entrada de dados ===================\n")
print("    apenas  <enter>   para ler os dados padrao   \n")
try:
papel = input("Video, (papel = 0);    Papel, (papel = 1)   -->   papel
except:
papel = 0
try:
titulo = raw_input("Titulo do grafico, equacao, formato texto ")
except:
titulo = "    "
try:
tituloLaTeX = raw_input("Titulo do grafico, equacao, formato LaTeX ")
except:
tituloLaTeX = "Gr\\'afico de curvas de n\\'ivel"
```

```
## etiqueta = raw_input("Etiqueta referencia-grafico - part
## arquivo_grafico = raw_input("numero do arquivo, apenas p
###  Atualizar os DADOS AQUI  #####
##  Troque aqui as equacoes de  f  e  f' = df
##titulo = "1/x*x"
##tituloLaTeX = "\\frac{1}{x^{2}} "
##etiqueta = "Nove"
## arquivo_grafico = "09"
## ######################
## arquivo_grafico = "calculo14.01.02.res.19."+str(arquivo_
print("Escolha do retangulo de trabalho  [a,b] x [c,d]  \n"
try:
a= input("No eixo OX forneca-me o intervalo [a,b] ---> a =
except :
a = -15
try:
b= input("No eixo OX forneca-me o intervalo [a,b] ---> b =
except :
b = 15
try:
c= input("No eixo OY forneca-me o intervalo [c,d] ---> c =
except :
c = -15
try:
d= input("No eixo OY forneca-me o intervalo [c,d] ---> d =
except :
d = 15
print(" O nivel do corte  -        f(x,y) = C    ")
try:
nivel = input("Nivel do corte da superficie ------------> C
except :
nivel = 4
print("  ============    precisao   =====================
try:
delta = input(" Precisao da malha ----> delta = ")
except :
delta = 0.05
try:
passo = input(" Precisao do grafico ---> passo = ")
except :
passo = 0.001
data = open("eixos","w")
data.write(str(a)+" " +str(0)+"\n")
data.write(str(b)+" " +str(0)+"\n")
data.write("\n")
data.write("\n")
```

```
data.write(str(0)+" " +str(c)+"\n")
data.write(str(0)+" " +str(d)+"\n")
data.write("\n")
data.write("\n")
data.close()
x = float(a)
data = open("data","w")
while x < b:
y = c
while  y < d:
if abs(f(x,y)-nivel) < 0.2:
try:
theta = -atan(fx(x,y)/fy(x,y))
s = 0
while s < delta:
x1 = x + s*cos(theta)
y1 = y + s*sin(theta)
data.write(str(x1)+" " +str(y1)+"\n")
s = s + passo
except ZeroDivisionError:
y = y + delta
data.write("\n")
data.write("\n")
y = y + delta
else:
y = y + delta
x = x + delta
data.close()

trans = open("transfere","w")
if papel == 1:
trans.write("set term postscript portrait 'monochrome'\n")
trans.write("set output '"+str(arquivo_grafico)+".eps"+"' \n")
trans.write("set title '"+str(titulo)+"' \n")
trans.write("set pointsize 0.1\n")
trans.write("set size 0.7,0.5 \n")
trans.write("plot 'data' with points, 'eixos' with lines \n")
if papel == 0:
trans.write("pause"+" "+str(-2)+"\n")
## chama um processo externo, Gnuplot com o parametro
trans.close()
popen("gnuplot 'transfere'")
```

A saída de dados, deste programa, para o nível 4 *pode ser vista na figura (fig. 5.1), página 207.*

——————————————————

Figura 5.1: .Curva de nível

4. *Seja* $f(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2$*. Calcule a derivada de* y *como função de* x *nesta expressão. Calcule também a derivada de* x *como função de* y *nesta expressão.*

5. *Encontre a equação da reta tangente ao círculo* $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 4$ *no ponto* $(2, 4+\sqrt{3})$*.*

5.9.1 Diferencial

Retornando

Exercícios: 51 *Diferencial*

1.
2.

5.10 Funções definidas via integral.

Uma das aplicações da integral é de representar a energia acumulada de um fenômeno, por exemplo, se $v(t)$ representar a velocidade de um corpo no instante t, então $\int_a^b v(t)$ representa a distância percorrida. Trabalho é outra grandeza física definida via integral. Aqui vamos exercitar o uso da integral também para calcular médias e finalmente para definir novas funções com uma condição inicial dada.
Seria interessante fazer os exercícios 24 da página 112, se você ainda não os tiver feito, como preparação, antes de prosseguir nesta lista. Reveja também os gráficos daquela seção.
Nesta lista de exercícios vamos trabalhar com o conceito de valor médio integral aprofundando o que já vimos em capítulo anterior e com ele chegando ao cálculo formal da integral que culmina no Teorema Fundamental do Cálculo

Definição: 29 *Função integrável*
Seja f uma função $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbf{R}$.
Dizemos que f é integrável se qualquer sucessão de somas de Riemann associadas às partições uniformes do intervalo $[a, b]$ representa um mesmo número, chamado $\int_a^b f$.

Esta definição é <u>insuficiente</u>, mas funciona com a grande maioria de funções integráveis que você poderá encontrar num curso de Cálculo.

Definição: 30 *Valor médio integral*
Seja f uma função integrável.
O número $\frac{1}{b-a}\int_a^b f$ é o valor médio integral de f relativamente ao intervalo $[a, b]$.

Observe que cálculos anteriormente feitos com as somas de Riemann de $\frac{1}{b-a}\int_a^b f$ sugeriam que o *valor médio integral* tinha o que ver com *média aritmética ponderada*. Ele não tem o que ver, ele é uma média aritmética ponderada.
O instrumento teórico básico para esta seção é o seguinte teorema chamado `teorema do valor médio integral`

Teorema: 19 *valor médio integral*
Seja $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ uma função integrável. Existe um número m, chamado média de f em $[a, b]$ tal que

$$\int_a^b f = m(b-a) \iff m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f$$

Este teorema é uma generalização da regra para calcular área de trapésios.

5.10.1 O valor médio integral.

Exercícios: 52 1. <u>*valor médio integral*</u> *Calcule o valor médio integral das funções abaixo no intervalo indicado.*

f	$[a,b]$	f	$[a,b]$
$a) f(x) = x+3$	$x \in [-3, 0]$	$b)\ f(x) = x^2 + 3x$	$x \in [-1, 1]$
$c) f(x) = x^2$	$x \in [0, 1]$	$d)\ f(x) = 4$	$x \in [-4, 4]$
$e) f(x) = x^2$	$x \in [-1, 0]$	$f)\ f(x) = 4$	$x \in [0, 4]$
$g) f(x) = x$	$x \in [-1, 1]$	$h) f(x) = x^2$	$x \in [-1, 1]$
$i) f(x) = x^3$	$x \in [-1, 1]$	$j) f(x) = x^3$	$x \in [-1, 0]$
$k) f(x) = x$	$x \in [0, 1]$	$l) f(x) = sin(x)$	$x \in [-1, 1]$

2. *Faça um programa (ou use um programa) que calcule a média de uma função com n amostras, no intervalo*[11] $[a, b]$.

3. *média aritmética ponderada Por definição, a* `média aritmética ponderada` *dos n números $a_1, \cdots, a_n$ é*

$$MP = \frac{p_1 a_1 + \cdots + p_n a_n}{\sum_{k=1}^{k=n} p_k}$$

Mostre que

$$MP = \sum_{k=1}^{n} t_k a_k \ ; \ \sum_{k=1}^{k=n} t_k = 1.$$

e identifique o valor dos pesos t_k relativamente a expressão anterior de MP.

4. <u>*Valor médio integral*</u>

   (a) *Escreva a expressão da* soma de Riemann *para $\frac{1}{b-a}\int_a^b f$, não precisa ser uniforme*[12].

   (b) *Verifique que as somas de Riemann de $\frac{1}{b-a}\int_a^b f$ quando $a < b$ são somas do "tipo"*

   $$\sum_{k=0}^{N} t_i f(x_i)$$

   em que os números t_i são positivos, $\sum_{i=0}^{N} t_i = 1$, quer dizer pesos em uma média aritmética ponderada, *portanto "as somas de Riemann do valor médio integral" são* médias aritméticas ponderadas.

Observação: 32 *Supremo e ínfimo.*
Veja por exemplo o intervalo aberto $I = (3, 5]$. I tem um máximo, que é 5 e um ínfimo que é 3. O que faz com que 3 seja um ínfimo, e não **mínimo** *é que $3 \notin I$.*
Os seguintes conceitos estão relacionados:

[11] observe que a definição de média está associada a um intervalo, critique isto.
[12] soma de Riemann uniforme é quando os sub-intervalos são todos de mesma medida.

- *Máximo, Supremo, Cota Superior.*
- *Mínimo, infimo, Cota Inferior.*

Qualquer número que seja menor do que **todos** *os elementos de I é uma* `cota Inferior`. *O* `ínfimo` *é a maior destas cotas inferiores. Se o ínfimo pertencer ao conjunto ele é o mínimio.*

Da mesma forma, qualquer número que seja maior que todos os elementos de I é uma `cota superior`, *o* `suppremo` *é a menor das cotas superiores. Se o supremo pertencer ao conjunto I ele se chama* `máximo`.

5. *Calcule $Sup(f), inf(f)$ no intervalo $[a,b]$, nos casos abaixo, se existirem (indique quando e porque no caso de não existirem):*

a) $[0,2\pi]$	$f(x) = sen^2(x) + cos^2(x)$	b) $[0,2\pi]$	$f(x) = cos^2(x)$
c) $[-2\pi,2\pi]$	$f(x) = sen^2(x)$	d) $[-2\pi,2\pi]$	$f(x) = sen^2(x) + 1$
e) $[-3,4]$	$f(x) = x^2$	f) $[-3,4]$	$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$
g) $[-3,4]$	$f(x) = x+3$	h) $[-3,4]$	$f(x) = \frac{1}{x+3}$
i) $(0,\infty)$	$f(x) = \frac{1}{x}$	j) $[1,\infty)$	$f(x) = \frac{1}{x}$
k) $(0,\infty)$	$f(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$	l) $[1,\infty)$	$f(x) = \frac{1}{1+cos^2(x)}$

em cada caso acima decida se

$\boxed{Se\ Sup = Max\ ;\quad se\ inf = min.}$

6. *Prove que, para qualquer soma de Riemann,*

$$inf(f) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f \le Sup(f)$$

em que $inf(f)$ é o ínfimo de f e $Sup(f)$ é o supremo de f.

7. *Um carro foi dirigido por duas horas a uma velocidade constante de $70km/h$ na primeira hora depois do que a velocidade foi decaindo uniformemente até chegar em $10km/h$ ao final do percurso, no centro da cidade.*
   (a) *Faça um gráfico do tempo contra a velocidade do movimento do carro.*
   (b) *Qual foi a distância percorrida.*
   (c) *Qual foi a velocidade média com que o percurso foi feito.*
   (d) *Qual foi a velocidade máxima? qual foi a velocidade mínima?*

8. *integral e valor médio Enuncie a fórmula da área de trapésio. Você poderia escrever fórmula semelhante que dê área sob o gráfico de uma função, $\int_a^b f$?*

9. *integral e supremo Modifique a fórmula da integral e do valor médio, na questão 8, usando supremo de f no lugar da média.*

10. *integral e ínfimo Modifique a fórmula da integral e do valor médio, na questão 8, usando ínfimo de f no lugar da média.*

11. *derivada e integral Considere f uma função integrável no intervalo $[a,b]$ que contenha c como* ponto interior[13].
    (a) *Defina $F(x) = \int_a^x f(t)$. Verifique que $\int_c^{c+\Delta x} f = \Delta F$.*
    (b) *Quanto vale o limite:*

$$\lim_{\Delta x=0}\left(\frac{1}{\Delta x}\int_c^{c+\Delta x} f\right).$$

5.10.2 Funções definidas via Integral.

A idéia aqui é: se f for uma função integrável no intervalo I ; $c \in I$ então uma nova função se define por meio da fórmula

$$F(x) = b + \int_c^x f(t)\ ;\ x \in I.$$

Vamos investigar as relações entre f, F. Da seção anterior já tiramos uma conclusão: $F' = f$.

A nova função $F(x) = \int_c^x f(t)$ se chama "primitiva" de f com `condição inicial` (c,b).

Definição: 31 *Primitiva com condição inicial dada.*
Se f for uma função integrável no intervalo I; $c \in I$ diremos que

$$F(x) = b + \int_c^x f(t)$$

é a **primitiva** *de f com a* **condição inicial** (c,b) *dada. Observe que $F(c) = b$, quer dizer que o gráfico de F passa no ponto (c,b).*

Exercícios: 53 *Primitiva de uma função*

1. *condição inicial Encontre as equações e faça os gráficos de*

   a) $\int_0^x 1$ b) $\int_{-1}^x 1$ c) $\int_1^x 1$ d) $\int_0^x 2$ e) $\int_0^x -2$ f) $\int_0^x -3$

   g) $\int_0^x t$ h) $\int_{-1}^x t$ i) $\int_1^x t$ j) $\int_0^x 2t$ k) $\int_0^x -2t$ l) $\int_0^x -3t$

2. *Considere $f(t) = t+3, g(t) = t+4$. Defina*

$$F(t) = \int_0^x f(t)\ ; G(t) = \int_0^x g(t)$$

Prove que $F(x) \le G(x)$ para todo $x > 0$.

[13] c é ponto interior de $[a,b]$ se, e somente se, $c \in (a,b)$

3. *Verifique que se f for uma função polinomial do primeiro grau, então* $F(x) = \int_a^x f(t)$ *é uma função do segundo grau.*

4. *Verifique que se f for uma função polinomial do segundo grau, então* $F(x) = \int_a^x f(t)$ *é uma função do terceiro grau.*

5. *Verifique que se f for uma função polinomial do grau n, então* $F(x) = \int_a^x f(t)$ *é uma função do $n+1$ grau.*

6. *problemas com condição inicial*

   Encontre uma[14] função cujo gráfico passe no ponto (a,b) com coeficiente angular m:

   a) $(a,b) = (0,1); m = 3$ *b)* $(a,b) = (-1,1); m = -2$
   c) $(a,b) = (1,1); m = -1$

7. *Encontre uma condição inicial (a,b) tal que* $F(t) = b + \int_a^x cos(t) = sen(x)$.

8. *Cálculo de primitivas com condição inical*

   (a) *Encontre a primitiva* $F(x) = \int_0^x f(t)$ *para*

   $$f(t) = \frac{|t|}{t}, \ \Leftarrow \ t \neq 0 \text{ e } f(0) = 0$$

   Em particular calcule o valor $F(0)$. Faça o gráfico de $y = F(x)$.

   (b) *Encontre a primitiva* $F(x) = \int_0^x |t|$. *Faça o gráfico de $y = F(x)$.*

   (c) *Encontre as primitivas das seguintes funções relativamente à condição inicial $(c,b) = (0,1)$:*

$f(t) = t$	$f(t) = -t$	$f(t) = \frac{t}{2}$	$f(t) = 1$	$f(t) = t^2$
$f(t) = t^3$	$f(t) = -2$	$f(t) = \frac{3t}{2}$	$f(t) = -\frac{1}{2} + 2t$	$f(t) = t + t^2$
$f(t) = sen(t)$	$f(t) = cos(t)$	$f(t)$=-$sen(t)$	$f(t) = \frac{t^2}{3}$	$f(t) = 2 - t + \frac{t^2}{3}$

9. *Preencha uma tabela no formato:*

$f(x)$	$f'(x)$

   para todas as funções cuja derivada ou primitiva você já conhecer.

[14] observe que cada item tem mais de uma solução, procure generalizar a solução.

5.11 A função logaritmo natural.

Veja no *índice remissivo* outras informações, neste livro, sobre os logaritmos.

A função logaritmo tem uma longa e honrada história, entretanto alguns dos seus aspectos ainda presentes na Escola Secundária e até em alguns cursos universitários, são assuntos de museu[15] e portanto não deveriam estar mais alí presentes.

Veremos, nos exercícios uma propriedade fundamental de qualquer função logaritmica f é: $f(xy) = f(x) + f(y)$. Elas transformam produto em soma.

Esta propriedade foi fundamental desde sua descoberta no final do século 14, por Johh Napier, até os anos 70 do século 20, portanto ao longo de seiscentos anos. Durante todo este tempo os logaritmos foram um dos principais métodos para construir tabelas que tivemos.

Hoje sua importância cresceu sobre outros aspectos.

Vamos aqui estabelecer uma ponte entre o método como os logaritmos foram descobertos e o que usamos hoje.

Napier e seus contemporâneos observaram que as potências de mesma base tinha a seguinte propriedade aditiva:

$$a^x a^y = a^{x+y}$$

e portanto se fosse feita uma tabela associando $x \to a^x$ esta tabela poderia ser usada para deduzir o valor de xy ao se consultar a tabela de forma inversa.

Por exemplo, veja a tabela 5.1, na página 216 que contem as potências de 10. Em um dos exercícios você será conduzido a fazer uma multiplicação histórica, de 16.788040 por 23.713737.

O método para construir esta tabelas era muito complicado e consumia muito tempo. Naturalmente, as tabelas que existiam eram re-impressas e usadas por muito tempo.

Nos exercícios desta seção você verá outras aplicações dos logaritmos.

Exercícios: 54 *Logaritmo*

1. *Considere a função*

   $$f(x) = \int_1^x \frac{1}{t}.$$

   Veja o gráfico (fig. 3.9), página 122.

   (a) *Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, qual é a derivada de f ? Você pode disto deduzir que f é* crescente, decrescente, *tem* algum ponto de máximo *ou tem* algum ponto de mínimo *?*

   (b) *Calcule* $f(1), f(1.5), f(2), f(2.5), f(2.7)$.

   (c) *Descubra, usando somas de Riemann e um programa de computador, a solução da equação:*

   $$\int_1^x \frac{1}{t} = 1.$$

   Use o programa `riemann.py` *por exemplo.*

   (d) *Escreva uma soma de Riemann uniforme[16] para* $\int_a^b \frac{1}{t}$. *Prove que*

   $$\int_a^b \frac{1}{t} = \int_1^{b/a} \frac{1}{t} = \int_{a/b}^1 \frac{1}{t}$$

[15] Veja "museu" no índice remissivo

[16] os sub-intervalos são todos iguais

isto é: "podemos cancelar um dos limites de integração multiplicativamente na integral"[17].

(e) *Expresse em termos da uma integral cuja condição inicial seja $t = 1$, as seguintes integrais:*

a) $\int_2^6 \frac{1}{t}$ | b) $\int_6^3 \frac{1}{t}$ | c) $\int_5^{15} \frac{1}{t}$

(f) <u>*aditividade*</u>[18] *Mostre que:*

i. $\int_1^{ab} \frac{1}{t} = \int_1^{b} \frac{1}{t} + \int_b^{ab} \frac{1}{t}$

ii. $\int_1^{ab} \frac{1}{t} = \int_1^{b} \frac{1}{t} + \int_1^{a} \frac{1}{t}$

2. *Mostre que se* $f(x) = \int_1^x \frac{1}{t}$ *então* $f(ab) = f(a) + f(b)$, *isto é* f *transforma "produtos" em "adições."*

3. *Prove as seguintes propriedades de* $y = f(x)$:

(a) *Se* $x > 1$ *então* $f(x) > 0$.

(b) *Se* $0 < x < 1$ *então* $f(x) < 0$.

(c) f *não está definida para* $x < 0$. *Em outras palavras, o domínio de* f *é* $\mathbf{R}^{++}$.

(d) *Existe um número real e tal que* $f(e) = \int_1^e \frac{1}{t} = 1$. *Situe aproximadamente este número.*

(e) $f(\frac{1}{a}) = -f(a)$.

(f) $f(\frac{a}{b}) = f(a) - f(b)$.

4. *Com* $f(x) = \int_1^x \frac{1}{t}$, *preencha*[19] *a tabela seguinte:*

x	$f(x)$	$f'(x)$	x	$f(x)$	$f'(x)$
$\frac{1}{6}$			2.5		
0.2			e		
$\frac{1}{3}$			3		
0.5			3.5		
1			5		
1.5			6		
2			e^2		

Use a informação contida na tabela para esboçar o gráfico de $y = f(x)$. *Antes discuta qual o domínio da função, quer dizer, qual é o intervalo onde existe gráfico.*

5. <u>*Museu: multiplicação usando logaritmos*</u>

(a) *Veja na tabela 5.1 quais são*

$$log(16.788040), log(23.713737)$$

e adicione estes valores.

(b) *O resultado da adição acima é* 2.6 *e agora veja qual é a solução da equação* $log(x) = 2.6$ *Este número é, aproximadamente, o produto de* 16.788040 *por* 23.713737.

(c) <u>*Mas se quisermos multiplicar* 16.78 x 23.71</u>

i. *Interpole aritmeticamente os valores dos logaritmos*

$$log(16.788040), log(15.848931)$$

(calcule a média aritmética destes valores).

ii. *Interpole aritmeticamente os logaritmos*

$$log(23.713737), log(22.387211)$$

considerando estes os valores respectivos de $log(16.78), log(23.71)$. *Some estes valores que sera o logaritmo do resultado.*
<u>**Resposta:**</u> $log(x) = 3.5750$
Na tabela você vair encontrar 3758.3740 *que tem um erro de leitura de uma casa deximal, portanto o valor aproximado da multiplicação deseja será* 375.83740. *Se você fizer os cálculos com uma maquina de calcular, vai poder analisar o erro que nossos antepassados tinham que evitar com interpolações mais acuradas... Não era fácil, mesmo assim eles previam a passagem dos planetas e fizeram calendários...*

6. *Verifique que as equações*

$$\frac{ln(x)}{x} = \frac{ln(2)}{2} \ ; \ x^2 = 2^x$$

são equivalentes e encontre todas as solução positivas da primeira.

7. *Prove que* $ln(\frac{1}{x}) = -ln(x) \ ; \ x > 0$.

[17]Observe que esta é uma <u>*propriedade privativa*</u> da integral de $f(x) = \frac{1}{x}$.

[19]se você puder use um programa de computador para calcular aproximadamente as integrais, se não puder fazê-lo, deixe representado sob forma de integral.

x	log x	x	log x	x	log x	x	log x
10.0	1	105.92537	2.025	1059.2537	3.025	10592.537	4.025
10.592537	1.025	112.20184	2.05	1122.0184	3.05	11220.184	4.05
11.220184	1.05	118.85022	2.075	1188.5022	3.075	11885.022	4.075
11.885022	1.075	125.89254	2.1	1258.9254	3.1	12589.254	4.1
12.589254	1.1	133.35214	2.125	1333.5214	3.125	13335.214	4.125
13.335214	1.125	141.25375	2.15	1412.5375	3.15	14125.375	4.15
14.125375	1.15	149.62356	2.175	1496.2356	3.175	14962.356	4.175
14.962356	1.175	158.48931	2.2	1584.8931	3.2	15848.931	4.2
15.848931	1.2	167.88040	2.225	1678.8040	3.225	16788.040	4.225
16.788040	1.225	177.82794	2.25	1778.2794	3.25	17782.794	4.25
17.782794	1.25	188.36490	2.275	1883.6490	3.275	18836.490	4.275
18.836490	1.275	199.52623	2.3	1995.2623	3.3	19952.623	4.3
19.952623	1.3	211.34890	2.325	2113.4890	3.325	21134.890	4.325
21.134890	1.325	223.87211	2.35	2238.7211	3.35	22387.211	4.35
22.387211	1.35	237.13737	2.375	2371.3737	3.375	23713.737	4.375
23.713737	1.375	251.18864	2.4	2511.8864	3.4	25118.864	4.4
25.118864	1.4	266.07250	2.425	2660.7250	3.425	26607.250	4.425
26.607250	1.425	281.83829	2.45	2818.3829	3.45	28183.829	4.45
28.183829	1.45	298.53826	2.475	2985.3826	3.475	29853.826	4.475
29.853826	1.475	316.22776	2.5	3162.2776	3.5	31622.776	4.5
31.622776	1.5	334.96543	2.525	3349.6543	3.525	33496.543	4.525
33.496543	1.525	354.81338	2.55	3548.1338	3.55	35481.338	4.55
35.481338	1.55	375.83740	2.575	3758.3740	3.575	37583.740	4.575
37.583740	1.575	398.10717	2.6	3981.0717	3.6	39810.717	4.6
39.810717	1.6	421.69650	2.625	4216.9650	3.625	42169.650	4.625
42.169650	1.625	446.68359	2.65	4466.8359	3.65	44668.359	4.65
44.668359	1.65	473.15125	2.675	4731.5125	3.675	47315.125	4.675
47.315125	1.675	501.18723	2.7	5011.8723	3.7	50118.723	4.7
50.118723	1.7	530.88444	2.725	5308.8444	3.725	53088.444	4.725
53.088444	1.725	562.34132	2.75	5623.4132	3.75	56234.132	4.75
56.234132	1.75	595.66214	2.775	5956.6214	3.775	59566.214	4.775
59.566214	1.775	630.95734	2.8	6309.5734	3.8	63095.734	4.8
63.095734	1.8	668.34391	2.825	6683.4391	3.825	66834.391	4.825
66.834391	1.825	707.94578	2.85	7079.4578	3.85	70794.578	4.85
70.794578	1.85	749.89420	2.875	7498.9420	3.875	74989.420	4.875
74.989420	1.875	794.32823	2.9	7943.2823	3.9	79432.823	4.9
79.432823	1.9	841.39514	2.925	8413.9514	3.925	84139.514	4.925
84.139514	1.925	891.25093	2.95	8912.5093	3.95	89125.093	4.95
89.125093	1.95	944.06087	2.975	9440.6087	3.975	94406.087	4.975
94.406087	1.975	1000.0	3.0	10000.0	4.0	100000.0	5.0

Tabela 5.1: Tabela de Logaritmos decimais

5.11.1 A família das funções logarítmicas.

Se k for uma constante, positiva ou negativa, mas diferente de zero, todas propriedades que discutimos para $f(x) = \int_1^x \frac{1}{t}$ continuam válidas para a nova função

$$g(x) = f_k(x) = kf(x) = \int_1^x \frac{k}{t}.$$

Estas funções também são logaritmicas e vamos ver a diferença entre elas.

1. Considere k um número real qualquer, diferente de zero e defina

$$f_k(x) = kf(x) = \int_1^x \frac{k}{t}\ ;\ x > 0.$$

Prove que:

$f_k(ab) = f_k(a) + f_k(b)$	$f_k(1) = 0$	$f_k'(x) = \frac{k}{x}$
$f_k(\frac{1}{a}) = -f_k(a)$	$f_k(\frac{a}{b}) = f_k(a) - f_k(b)$	$f_k(a^n) = nf_k(a)$

2. Faça o gráfico de $f_k(x) = kf(x)$ quando

k=-5	k=-3	k=-1	k=2	k = 0.5	k=0.3

3. base do logaritmo O que caracteriza o logaritmo natural é o número e solução da seguinte equação:

$$\int_1^e \frac{1}{t} = ln(e) = 1.$$

O número e é a base dos *logaritmos naturais*.

(a) Calcule com somas de Riemann uma aproximação para e.

(b) Calcule k tal que

a) $\int_1^{10} \frac{k}{x} = 1$	b) $\int_1^{2} \frac{k}{x} = 1$	c) $\int_1^{3} \frac{k}{x} = 1$	d) $\int_1^{1/3} \frac{k}{x} = 1$	e) $\int_1^{1/2} \frac{k}{x} = 1$

5.12 A função exponencial.

1. logaritmo e sua inversa

(a) Verifique que $f(x) = ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}$ é uma função bijetiva; $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$.

(b) Defina a inversa $exp(x) = f^{-1}(x)$. Prove:

i. $Dom(exp) = \mathbf{R}$;

ii. $exp(a) * exp(b) = exp(a + b)$;
iii. $exp(0) = 1$;
iv. $exp(x) > 0$.
v. $exp(-a) = \frac{1}{exp(a)}$
vi. $\frac{exp(a)}{exp(b)} = exp(a - b)$
vii. $\frac{d\ exp(x)}{dx} = exp(x)$

(c) Trace o gráfico de $f(x) = ln(x)$ e dele deduza o gráfico de $g(x) = f^{-1}(x) = exp(x)$.

(d) exponencial e base Calcule um valor aproximado para $exp(1)$.

2. Deduza da fórmula fundamental dos logartimos,

3. Deduza a fórmula básica da exponencial $a^x = exp(x\ ln(a)) = e^{x\ ln(a)}$.

4. Escreva todas as propriedades que vocêconhece da função $f(x) = e^x$.

5. seno e coseno hiperbólicos Descreva o domínio, verifique se é par ou impar, pontos críticos, (se houver), calcule a derivada de cada uma das funções abaixo:
   a) $h(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ b) $h(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ c) $h(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}}2$
   Faça os gráficos destas funções.

6. Faça os gráficos de $h(x) = a^x$ com
   a) $a = 10$ b) $a = 2$ c) $a = \frac{1}{2}$ d) $a = 7$ e) $a = 5$
   Em cada caso calcule $h'(x)$ e verifique se os gráficos obtidos conferem com a variação indicada pela derivada.

7. Escreva todas as propriedades que você conhecer da função $f(x) = a^x$; $a > 0$.

8. Gráficos das funções:
   a) $h(x) = ln(\frac{x+3}{x-1})$ b) $h(x) = ln(\frac{|x+3|}{|x-1|})$ c) $h(x) = e^{sen(x)}$
   d) $h(x) = Arcsin(x)$ e) $h(x) = Arccos(x)$ f) $h(x) = sen(e^x)$

9. Calcule as integrais: a) $\int_{-10}^{10} e^t$ b) $\int_{-10}^{0} e^t$ c) $\int_{-10}^{10} cos(t)sen(t)$ d) $\int_{0}^{10} e^t$ e) $\int_{10}^{0} e^t$

10. Determine o domínio das funções seguintes:
    a) $f(x) = ln(x^2 + 3x + 2)$ b) $f(x) = ln(9 - x^2)$ c) $f(x)\frac{1}{e^x}$
    d)$f(x) = \frac{1}{ln(x^2+3x+2)}$ e) $f(x) = \sqrt{ln(x)}$

11. Calcule as derivadas das funções abaixo:
    a) $f(x) = \frac{x}{ln(x^2+3x+2)}$ b) $f(x) = xln(1 - x^2)$ c) $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$
    d)$f(x) = \frac{x^2+2x+1}{ln(x^2+3x+2)}$ e) $f(x) = \sqrt{xln(x)}$

12. Calcule as derivadas segundas das funções definidas no item anterior.

5.13 Polinômio de Taylor

Da mesma forma como podemos encontrar *uma reta tangente ao gráfico de uma função* também é possível encontrarem-se *polinômios, de diversos graus, tangentes ao gráfico* de uma função.
Em tempos idos se considerava este método como *aproximação* de funções. Hoje sabemos que este é um método auxiliar na construção da aproximação de funções.
Os exercícios desta seção vão explorar a própria *fórmula de Taylor* como iniciá-lo em algumas técnicas que podem conduzir você às étapas posteriores...

Os polinômios tem diversos graus que representam as suas derivadas de diversas ordens, se uma função tiver derivadas de várias ordens, podemos, usando o conceito de derivada, descobrir os tais polinômios tangentes.

Veremos que que eles são mais do que *apenas tangentes*, eles memorizam propriedades avançadas das funções.

Exercícios: 55 *Fórmula de Taylor*

1. *Derivadas sucessivas de um polinômio.*
   (a) *Calcule todas as derivadas do polinômio*
   $$P(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + a_3(x - a)^3.$$
   (b) *Com o polinômio definido no item anterior, escreva os valores de*
   a) $P(a)$ *b)* $P'(a)$ *c)* $P''(a)$ *d)* $P'''(a)$ *e)* $P^{(4)}(a)$ *f)* $P^{(5)}(a)$.

2. *Derivadas sucessivas de uma função; Polinômio de Taylor*
   (a) *Encontre um polinômio do primeiro grau tangente à função* $f(x) = ln(x)$ *no ponto* $(1, 0)$. *Use a fórmula da reta tangente.*
   (b) *Encontre um polinômio do segundo grau tangente à mesma função, no mesmo ponto e tendo a mesma curvatura que a função no ponto dado.*
   (c) *Encontre um polinômio do terceiro grau que coincida com à mesma função, até a terceira derivada.*
   (d) *Faça os gráficos referentes aos itens anteriores.*

3. *função exponencial*
   (a) *Encontre o polinômio de Taylor do terceiro grau da função* $f(x) = exp(x)$ *no ponto* $a = 0$.
   (b) *Encontre o polinômio de Taylor do quarto grau da função* $f(x) = exp(x)$ *no ponto* $a = 0$.
   (c) *Faça os gráficos dos polinômios de Taylor encontrados.*

4. *funções sen e cos*
   (a) *Encontre o polinômio de Taylor do sétimo grau da função* $f(x) = sen(x)$ *no ponto* $a = 0$.

(b) *Encontre o polinômio de Taylor do oitavo grau da função* $f(x) = cos(x)$ *no ponto* $a = 0$.

(c) *Faça os gráficos dos polinômios de Taylor encontrados.*

5. *Colagem diferenciável de funções*

   (a) *Considere a função polinomial* $f(x) = (x+3)(x-3)$ *definida no intervalo* $[-3,3]$. *Encontre uma função polinomial* $g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ *tal que*

   - $g(3) = f(3)$; *mesmo valor no ponto*
   - $g'(3) = f'(3)$; *mesmo coeficiente angular no ponto*
   - $g''(3) = -f''(3)$. *curvatura invertida no ponto.*

   (b) *Considere a função* $[-3,7] \xrightarrow{h} \mathbf{R}$ *que no intervalo* $[-3,3]$ *coïncide com* f *e que no intervalo* $[3,7]$ *coïncide com* g. *Faça o gráfico de* h

6. *Colagem diferenciável de funções*

   (a) *Considere a função polinomial* $f(x) = (x+3)(x-3)$ *definida no intervalo* $[-3,3]$. *Encontre uma função polinomial* $g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ *tal que*

   - $g(3) = f(3)$; *mesmo valor no ponto*
   - $g'(3) = f'(3)$; *mesmo coeficiente angular no ponto*
   - $g''(3) = -3f''(3)$. *curvatura invertida e aumentada no ponto.*

   (b) *Considere a função* $[-3,7] \xrightarrow{h} \mathbf{R}$ *que no intervalo* $[-3,3]$ *coïncide com* f *e que no intervalo* $[3,7]$ *coïncide com* g. *Faça o gráfico de* h

7. *Colagem diferenciável de funções Encontre uma função polinomial* f *que coïncida com sen no ponto* $\frac{\pi}{2}$ *tenha mesmo coeficiente angular instâneo que sen no ponto* $\frac{\pi}{2}$ *mas que no ponto* $\frac{\pi}{2}$ *a derivada segunda de* $f''(\frac{\pi}{2}) = -sen''(\frac{\pi}{2})$. *Faça o gráfico de* f *no intervalo* $[-1,4]$.

5.14 Técnicas de integração

Herdamos dos matemáticos que viveram nos séculos 18 e 19 uma rica heranç a construída minuciosamente de fórmulas de diversos tipos. Em particular aquelas com podemos calcular

$$\int_a^b f.$$

Hoje sabemos que este belo trabalho artesanal só responde às questões triviais ficando uma vastíssima classe de funções para as quais não há fórmulas que permitam o cálculo exato da integral.
Fora isto, na grande maioria das aplicações, o cálculo da integral se faz numericamente de forma automática dentro de programas que controlam os processos onde a integral representa a quantidade de um certo fenônomeno.
Nós sugerimos que as somas de Riemann era o método adequado. Ela é o único método seguro para calcularmos integrais, entretanto existem outros métodos, modificações da soma de Riemann, que permitem maior velocidade neste cálculo. Tais métodos não serão contemplados neste volume.
A maioria das "técnicas de integração" que podemos encontrar nos livros de Cálculo se tornaram peç as de museu. Em alguns casos elas servem apenas como instrumento teórico. Vamos discutí-las e repetir esta crítica pontualmente.

5.14.1 O teorema fundamental do Cálculo

Só sabemos calcular a integral $\int_a^b f$ se conseguirmos identificar uma função F ligada à f pela relação

$$F' = f$$

e estas duas funções são designadas com os nomes `primitiva` e `derivada` dependendo em que direção você olhe.

Se conseguirmos idenficar uma primitiva para f então

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

sendo esta a expressão do Teorema Fundamental do Cálculo Integral.

Existem vários truques algébricos para conseguir, em alguns poucos casos, estabelecer uma relação deste tipo. O trabalho matemático por traz destes cálculos é bonito, mas é preciso que dizer que ele é um artenasanato nada científico.

A única maneira segura de cálcular integrais é a numérica. É preciso pontuar, entretanto, que antes de se lanç ar num cálculo numérico de uma integral, é preciso saber se ela existe, e aí está a importância da arte que vamos aqui descrever. Se torna importante porque, se ela não fornecer o caminho para o cálculo da integral, ela sempre oferece uma resposta precisa sobre a existência da integral, sendo esta a sua grande importância.

Aqui, portanto, você não vai aprender a calcular todas as integrais, mas vai ficar dominando uma técnica segura para saber se a integral existe. Um exemplo simples, que já foi objeto de estudo páginas atrás, é a integral

$$\int_0^1 \frac{1}{t}$$

que não existe. Seria um cálculo numérico sem futuro o desta integral, e muito pior, um indivíduo ignorante da teoria poderia se lanç ar ao cálculo de uma integral como

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{t}$$

que, sem o devido cuidado, um programa de computador poderia calcular e fornecer o valor zero, quando ela simplesmente não existe.

Esta seja a importância desta seção etiquetada como de *técnicas de integração*

As outras técnicas de integração dependem fortemente de uma habilidade em reconhecer uma primitiva para uma função, porisso a lista de exercícios que segue é importante. Nos livros de Cálculo se encontra atrás, sob o título, *tabela de integrais*, a solução de todos os exercícios desta seção. Por esta razão nós vamos omitir neste texto uma tabela de integração que seria plágio puro.

A partir de agora vamos escrever as integrais da seguinte forma,

$$\int f(x)dx$$

e o convidamos para ler a seção "mudanç a de variáveis", imediatamente, para entender de onde vem o "dx" na integral que até agora foi omitido, contrariando a notação consagrada em todos os livros. De agora em diantes vamos nos confinar dentro do habitual.

Exercícios: 56 *Exercícios usando o teorema fundamental*

1. *Calcule a equação de* $f(x) = \int_0^x \chi_{[1,3]}$ *e prove que* $f(x) \leq 1$.

2. *Calcule as integrais*

a) $\int_0^1 \frac{x}{2}dx$	*b)* $\int_0^1 t^3dt$	*c)* $2\int_0^{-1} t^2dt$	*d)* $\int_0^{-5} xdx$
e) $\int_0^1 t^2dt$	*f)* $\int_0^1 x^3dx$	*g)* $\int_0^1 x^4dx$	*h)* $5\int_0^1 x^4dx$
i) $\int_0^{\pi} tdt$	*j)* $\int_{-2\pi}^0 2tdt$	*k)* $\int_{-\pi}^0 1+t^2+\frac{t^3}{3}dt$	*l)* $\int_0^{\pi} t^{1/2}dt$

3. *Calcule as integrais*

a) $\int_0^1 \frac{x+3}{2}dx$	*b)* $\int_1^4 \frac{1}{t}dt$	*c)* $2\int_0^{-5} \frac{t^2+1}{3}dt$	*d)* $\int_0^x cos(t)dt$
e) $\int_0^x t^2dt$	*f)* $\int_0^t x^3dx$	*g)* $\int_{-a}^a x^4dx$	*h)* $5\int_{-a}^a x^2dx$
i) $\int_{-a}^a tdt$	*j)* $\int_{-2\pi}^{2\pi} 2tdt$	*k)* $\int_{-\pi}^{\pi} t+t^3+\frac{t^3}{3}dt$	*l)* $\int_{\pi}^{2\pi} t^{1/2}dt$

4. *Calcule as integrais*

a) $\int_0^{\pi}(x+sen(x))dx$	*b)* $\int_0^{\pi}(t^3+cos(t))dt$	*c)* $\int_0^{2\pi} \lvert sen(t)\rvert dt$	*d)* $\int_{-4}^5 \lvert x\rvert dx$
e) $\int_0^{2\pi} sen(t)dt$	*f)* $\int_{-3}^3 x^2(x^2-1)dx$	*g)* $\int_{-\pi}^{\pi} cos(t)dt$	*h)* $\int_{-2\pi}^{2\pi} cos(t)d$
i) $\int_0^{2\pi} cos(t)dt$	*j)* $\int_{-2\pi}^0 sen(t)dt$	*k)* $\int_{-\pi}^0 sen(t)dt$	*l)* $\int_{\pi}^{-\pi} cos(t)dt$

5. *Calcule*

$$f(\lambda) = \int_0^{\lambda} 1+2x+3x^2+4x^3dx$$

e calcule os zeros de f.

6. *função característica* *Calcule* $f(t) = \int_0^t \chi_{[0,5]} + \chi_{[7,10]}$. *Faç a o gráfico de* $y = f(x)$.

7. *função característica* *O gráfico da velocidade contra tempo de um carro é dado pela função* $\chi_{[0,10]} + \chi_{[3,7]} + \chi_{[5,6]}$. *Calcule a distância percorrida pelo carro.*

8. *função definida via integral*

   (a) *Calcule* $f(x) = \int_0^{x+1}(1+t+t^2)dt$

   (b) *Calcule* $g(x) = \int_{x+1}^0 (1+t+t^2)dt$

   (c) *Há alguma relação entre as funções* f, g?

9. *Desenvolva* $f(x) = \int_{-x}^x (1+t+t^2)dt$ *e calcule* $f(-3), f(3)$.

10. *Calcule* $\int_0^{2\pi}(sen(t)+cos(t))dt$

11. *Calcule* $\int_0^{\pi}(sen(t)+cos(t))dt$

12. *Seja* $f=\chi_{[0,10]}+\chi_{[2,10]}+\chi_{[4,10]}+\chi_{[6,10]}$. *Encontre a equação de* $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ *e faç a os gráficos de* f,F *num mesmo sistema de eixos.*

13. *Calcule os valores médios das seguintes funções no intervalo* $[0,1]$

f	f	f
$a)y=x+3$	$b)\ y=x$	$c)\ y=-x$
$d)y=x^2$	$e)y=x^3$	$f)\ y=x+1$
$g)y=1-x^2$	$h)\ y=1-\lvert x\rvert$	$i)y=1+t+t^3$

14. *A função velocidade dos móveis* $\mathcal{A}$ *e* $\mathcal{B}$ *durante o intervalo* $[0,t]$ *é dada, respectivamente, pelas equações:*
    - $\mathcal{A}(x)=sen(x)+1$;
    - $\mathcal{B}(x)=2sen(x)+1$.

    Qual dos dois móveis chegou mais longe? Observe que velocidade negativa significa que o motorista andou no sentido contrário do movimento inicial, algumas vezes, (marcha a ré... por exemplo).

5.14.2 A regra da cadeia no cálculo integral

Este texto é complementado pela seção "diferencial", veja no índice remissivo.

Ninguém usa esta terminologia de *regra da cadeia* para o método de integração que vamos aqui descrever. Você verá entretanto que tem sentido o nome.

A *regra da cadeia* para as derivadas diz: Se $h(x)=f(g(x))$, a composta de duas funções diferenciáveis, então:

$$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$$

Se $z=h(x)=f(y);y=g(x)$ então a expressão de Leibniz para a derivada joga mais luz nesta fórmula:

$$\frac{dh}{dx}=\frac{df}{dy}\frac{dy}{dx}$$

Se explicitarmos melhor os domínios onde estas funções estiverem definidas temos:

$$\Omega\xrightarrow{h}\mathcal{W}\ ;\ \Omega\xrightarrow{g}\mathcal{O}\xrightarrow{f}\mathcal{W}$$

Agora se expressarmos a integral de h, supondo que todas as funções são integráveis, teremos:

$$\int_{\Omega} h=\int_{x\in\Omega} f(g(x))=\int_{y\in\mathcal{O}} f(y)$$

em que traduzimos a expressão da integral para a imagem de f sobre o domínio intermediário $\mathcal{O}$, e estamos indicando, ao pé da integral a "variável" relativamente à qual a integral deve ser calculada.

Um hábito clássico, que atravessou os tempos conduzindo mitos, um deles concentrado numa palavrinha que gerou muitas e muitas discussões, *infinitesimal*, estabeleceu uma notação diferente da que usamos acima para caracterizar "qual é variável com respeito se está integrando:

$$\int_{\Omega} h(x)dx=\int_{\Omega} f(g(x))dx=\int_{\mathcal{O}} f(y)dy$$

e assim o nosso texto retoma uma notação que é comum em qualquer livro de cálculo nas expressões das integrais.

O que é mais curioso é a notação desta linguagem magnifica, *a Matemática*, montada muitas vez no bojo de preconceitos e mitos, muitas vezes criada num processo cooperativo em que as fronteiras nacionais são ignoradas, termina por funcionar como se tudo tivesse criado por um comité, e este comité siimplesmente não existe. Algumas vezes, e talvez este aspecto seja o mais bonito, a notação surge anônima dentro do processo social de que a Matemática, como toda a ciência faz parte, e a comunidade dos matemáticas acata a contrução e comumente a melhora. Existe um respeito sempre muito sério pelo que foi construido no passado.

A notação de Leibniz para derivadas se refere uma "fração"que nós cuidadosamente sempre observamos que "não é uma fração mas que funciona exatamente como se fosse...".

Vemos este fato interessante e típico das notações da Matemática, construida ao longo de anos, por povos distintos, mas bem integrada.

Existe uma função, que chamaremos de H, que é a primitiva de h com uma determinada condição inicial que não vem ao caso. Quer dizer que $H'=h$. Ou ainda, $\frac{dH}{dt}=h(t)$ em que t é um símbolo que representa os elementos do domínio Ω.

Poderiamos ter escrito $\frac{dH}{dx}=h(x)$, *afinal não existe mesmo nenhuma variável nas funções...*

Se escrevermos $dH=h(x)dx$. Vamos reconhecer o que esta escrito na sequência de integrais acima, e, o que é melhor, temos equivalentemente, na regra da cadeia:

$$dH=h(x)dx=f(y)dy=f(g(x))g'(x)dx$$

em que os nossos antigos, em meio a mitos e preconceitos, conseguiram escrever uma notação que traduz o se passa entre a integral e derivada sempre sem saber o que significa o "dx"que eles cognominavam de "infinitésimo"e os professores de Matemática por anos assustavam os alunos com esta idéia preconceituosa e assustadora.

No fundo uma belíssima notação que ficou claríssimo somente ao longo do século 20 pelo esforç o de diversos matemáticos na busca de entender o que seria mesmo o "infinitésimo"... A resposta é simples, *infinitésimos não existem...* embora ainda haja gente na procura de explicá-los, tal é o peso dos mitos.

Se escrevermos

$$\int_{\Omega} h=\int_{x\in\Omega} f(g(x))=\int_{y\in\mathcal{O}} f(y)$$

usando a notação de intervalos, considerando

$$[a,b]\xrightarrow{h}[c,d]\ ;\ [a,b]\xrightarrow{g}[\alpha,\beta]\xrightarrow{f}[c,d]$$

vamos ver obter um dos métodos clássicos para cálculo de integrais:

$$\int_a^b h(x)dx=\int_a^b f(g(x))g'(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta} f(y)dy$$

em que $\alpha=g(a)\ ;\beta=g(b)$ ou, o que é muito mais importante na prática, quando queremos calcular integrais *em que temos a expressão*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(y)dy$$

inicialmente, e que, com sorte[20], descobrimos que $h(x) = f(g(x))$ (ainda com mais sorte) a integral

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g)dg = \int_\alpha^\beta f(y)dy$$

é fácil de calcular, então escrevemos:

$$\int_\alpha^\beta f(y)dy = \int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g^{-1}(\alpha)}^{g^{-1}(\beta)} h(y)dy$$

e, devido sobretudo a troca de limites de integração, esta formulação se chama de `fórmula de integração` por `mudanç a` de `variáveis`.

O nome é uma infelicidade como muitas que existem em Matemática, como dizer que $\sqrt{2}$ é um número "irracional"ou que $3 + 2i$ é um número complexo. Defeitos que absorvemos dentro da nossa cultura matemática sem pretender alterar.

Exercícios: 57 *Cálculo de integrais com mudanç a de variável*

1. *Calcule as integrais das função listadas abaixo, no intervalo* $[0, 1]$.

a) $y = sen(2t)$	b) $y = tan(t)$	c) $y = \frac{2t}{1+t^2}$
d) $y = \frac{3t}{1+t^2}$	e) $y =$	f) $y = \frac{3sen(2t)}{cos(2t)}$
g)$y = e^{2t}$	h) $y = e^{-t}$	i) $y = Asen(Bt)$
j) $y = sen(2t) + cos(3t)$	k) $y = \frac{sen(t)}{\sqrt{1+cos(t)}}$	l) $y = sen(t)e^{cos(t)}$

2. *Calcule a integral*

$$f(\lambda) = \int_0^\pi \frac{sen(x)dx}{\sqrt{1 - 2\lambda cos(x) + \lambda^2}}$$

Resp $f(\lambda) = \frac{2}{|\lambda|}$ *se* $\lambda > 1$ *e* $f(\lambda) = 2 \Rightarrow |\lambda| \leq 1$.

3. *Calcule as integrais abaixo:*

a)$\int_0^x sen^2(t)cos(t)dt$	b) $\int_0^x cos^2(t)sen(t)dt$	c) $\int_t^0 sen^2(x)cos(x)dx$
d) $\int_0^t sen^3(x)cos(x)dx$	e) $\int_{-1}^t sen^2(x)dx$	f) $\int_{-2}^t cos^2(x)dx$
g) $\int_1^x e^{3t}dt$	h) $\int_2^x e^{-2t}dt$	
	i) $\int_2^x t^2e^{t^3}dt$	

4. *Calcule as integrais seguintes*

a)$\int_0^\pi sen^3(t)dt$	b) $\int_0^\pi cos^3(t)dt$	c) $\int_0^\pi sen^n(x)cos(x)dx$
d) $\int_0^\pi cos^n(x)sen(x)dx$	e) $\int_0^\pi sen(3x)cos(3x)dx$	f) $\int_0^\pi cos(2x)sen(2x)dx$
g) $\int_1^\pi sen(nx)cos(nx)dx$	h) $\int_0^x e^{at}dt$	
	i) $\int_0^x tan(x)dx$	

5. *Calcule as integrais seguintes*

a)$\int_0^\pi senx(t)e^{cos(t)}dt$	b) $\int_0^\pi cos(t)e^{sen(t)}dt$	c) $\int_0^\pi sen(2x)e^{cos(2x)}dx$
d) $\int_0^\pi 3cos(2x)e^{sen(2x)}dx$	e) $\int_0^1 \frac{dx}{1+e^x}$	f) $\int_0^1 x^2e^{x^3}dx$
g) $\int_1^\pi e^{3x-1}dx$	h) $\int_0^x e^{at-b}dt$	
	i) $\int_0^x x^2e^{4x^3}dx$	

6. *Prove que* $\int_0^{2\pi} sen^2(x)dx = \int_0^{2\pi} cos^2(x)dx$ *use então uma identidade fundamental para obter o valor de* $\int_0^{2\pi} sen^2(x)dx$.

7. • *Prove que*

$$\int_0^{2\pi} sen(nx)dx = \frac{1}{n}\int_0^{2n\pi} sen(x)dx$$

   • *Prove que*

$$\int_0^{2\pi} cos(nx)dx = \frac{1}{n}\int_0^{2n\pi} cos(x)dx$$

   • *Faç a uma análise do significado geométrico destas integrais. Obtenha uma fórmula para* $\int_0^a f(nx)dx$ *se* f *for integrável no intervalo* $[0, a]$. *Observe que se* $g(x) = nx$ *então* $dg = ndx$.

5.14.3 Integração por partes

Este método produz uma belíssima fórmula que encontrou uma utilização dentro da teoria da distribuições, sendo alí muito mais importante que seu objetivo primário: calcular integrais. Aliás, para calcular integrais ela em geral é muito demorada conduzindo a contas em que facilmente se comentem erros.

[20] afinal estamos falando de uma arte...

Agora vamos nos guiar pelo objetivo primário porque nesta altura seria difícil expor seu real valor, mas que fique para você a idéia de que somente um avanç o em profundidade na Matemática é vai conduzir a uma visão exata da importância desta fórmula.

Ela parte de uma coïncidência simples. Considere duas funções diferenciáveis, fg, sendo $h = fg$ o produto delas. Já vimos que podemos calcular a derivada de h

$$h' = f'g + fg'$$

e portanto, se calcularmos a primitiva desta expressão temos duas possibiidades interessantes para escolher (se por sorte valer a pena):

$$gf' = h' - fg' \ ; \ fg' = h' - gf'$$

que escritas dentro de uma integral ficam:

$$\int_a^b g(x)f'(x)dx = \int_a^b h'(x)dx - \int_a^b f(x)g'(x)dx = \tag{5.33}$$

$$= h(b) - h(a) - \int_a^b f(x)g'(x)dx == f(b)g(g) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)dx \ ; \tag{5.34}$$

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \int_a^b h'(x)dx - \int_a^b g(x)f'(x)dx = h(b) - h(a) - \int_a^b g(x)f'(x)dx = \tag{5.35}$$

$$= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(x)f'(x)dx \tag{5.36}$$

$$\tag{5.37}$$

Como dissemos, "com sorte", alguma dessas duas linhas pode representar um cálculo possível de ser feito, e neste caso, vamos supor que seja a segunda linha, para fixarmos as idéias:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(x)f'(x)dx$$

Finamente o método: Se tivermos a integral

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx$$

para calcular, e se soubermos qual é a primitiva de g' e se a segunda integral for fácil de ser calculada, então podemos calcular o valor da primeira com a fómula acima.

Esta fórmula é muito útil para se conseguir resultados com integrais do tipo $\int_a^b P(x)sen(x)dx$ em que P é um polinômio, porque, quando aplicada a fórmula, irá aparecer o coseno e o polinômio P cai um grau. Quer dizer, iterando-se esta fórmula chegaremos a uma expressão envolvendo apenas cos, sen com boa probabilidade de ser uma expressão que saibamos integrar, mas o trabalho pode ser longo. Se o que precisarmos é um valor aproximado da integral, possivelmente um programa de computador resolve a questão de forma mais precisa e mais rápida.

Exercícios: 58 *Integração por partes*

1. *Calcule a integral de f no intervalo indicado:*

$f(x) =$	$[a, b]$	$f(x) =$	$[a, b]$
$a)x^2sen(x)$	$[-3, 0]$	$b)\ x^2e^x$	$[-1, 1]$
$c)x^2cos(x)$	$[0, 1]$	$d)\ x^3e^{-x}$	$[-4, 4]$
$e)x^3sen(x)$	$[-1, 0]$	$f)\ x^3e^{-3x}$	$[-4, 4]$

2. *Considere $f(x) = 1 \cdot ln(x)$ e calcule $\int_0^1 ln(x)dx$*

3. *Calcule a integral de f no intervalo indicado:*

$f(x) =$	$[a, b]$	$f(x) =$	$[a, b]$
$a)x^2(1 + x)^4$	$[-3, 0]$	$b)\ x^2(1 + 2x)^4$	$[-1, 1]$
$c)x^2cos(4x)$	$[0, 1]$	$d)\ x^3cos(-x)$	$[-4, 4]$
$e)x^3sen(4x)$	$[-1, 0]$	$f)\ x^3sen(-3x)$	$[-4, 4]$

4. *Calcule $J_{n,p} = \int_0^1 x^n(1 - x)^p dx$ Resposta $J_{n,p} = \frac{p!n!}{(n+p+1)!}$*

5. *Prove que $\int_0^x \frac{tdt}{ch(t)} < 2$ para qualquer que seja $x \in \mathbf{R}^{++}$*

5.14.4 Frações racionais

Chamam-se frações racionais àquelas da forma

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

em que P, Q são polinômios. Aqui há várias chances possíveis, vamos discutir algumas.

- Se $gr(P) = gr(Q) - 1$ existe uma chance muito grande de que uma transformação algébrica leve a uma expressão do tipo

$$\int_a^b \frac{Q'(x)}{Q(x)}dx = \int_a^b \frac{Q'(x)dx}{Q(x)} = \int_\alpha^\beta \frac{du}{u} = ln(\beta) - ln(\alpha)$$

  observe que na última expressão estamos usando "mudanç a de variáveis". Nesta última integral podemos reconhecer o logaritmo resultando na última expressão escrita acima. Claro, há muita conta para ser feita até possivelmente chegarmos à última expressão.
- Uma outra possibilidade consiste em fatorações dos polinômios envolvidos conduzindo a expressões mais simples que possam ser desmembradas por equivalência algébrica e finalmente cair em um outro caso. Não há nenhuma fórmula para exibir aqui.
- De particular importância para o caso anterior, são dois tipos de expressões algébricas que vamos descrever agora.
  - $\int_a^b \frac{Adx}{x}$ que quando obtida cai diretamente no primeiro caso.
  - $\int_a^b \frac{Adx}{x^n}$ que podem ser calculadas com a regra da potência.

Exercícios: 59 *Frações racionais*

1. *Observe que*
$$\frac{5x+3}{x^2+2x-3} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+3}$$
   - *Calcule* $\int\limits_2^5 \frac{(5x+3)dx}{x^2+2x-3}$;
   - *Verifique em que domínios esta integral pode ser calculada.*

2. *Decomponha* $\frac{x^3+3x}{x^2+2x-3}$ *em soma de frações tais que o grau do numerador seja menor que o grau do denominador e calcule*
$$\int\limits_2^5 \frac{(x^3+3x)dx}{x^2+2x-3}$$

3. *Calcule* $\int\limits_2^5 \frac{(2x^2+5x-1)dx}{x^3+x^2-2x}$.

4. *Decomponha* $\frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+1)^2}$ *numa soma de tres frações com denominadores* $x-1, x+1, (x+1)^2$ *tendo no numerador constantes, e calcule*
$$\int\limits_2^5 \frac{(x^2+2x+3)dx}{(x-1)(x+1)^2}$$

5. *Decomponha* $y = f(x)$ *em soma de frações racionais e calcule as integrais das funções listadas abaixo, no intervalo indicado.*

$f(x) =$	$[a,b]$	$f(x) =$	$[a,b]$
$a)\frac{3x^2+2x-2}{x^3-1}$	$[2,5]$	$b)\ \frac{1}{x^3-x}$	$[-0.5,0.5]$
$c)\frac{2x+3}{x^2+3x-10}$	$[0,1]$	$d)\ \frac{x^2}{x^2+x-6}$	$[0,1]$
$e)\frac{x^4+2x-6}{x^3+x^2-2x}$	$[-1,0]$	$f)\ \frac{x+1}{x^2-2x+1}$	$[2,3]$

5.14.5 Miscelânea de exercícios de integração

Um último segredo: uma prática intensa da qual vamos oferecer aqui um pouco. O resto você deve procurar na literatura. Calcular integrais é uma arte difícil, mas muito bonita, e quem soube calcular integrais tem que ter um conhecimento intenso de uma grande variedade de fórmulas.

Um matemático norueguês, Abel, que morreu aos 28 anos, de tuberculos, sabia muito disto e seu nome ficou na história da Matemática para sempre, ligado a esta sua habilidade, devido às muitas fórmulas que ele descobriu. Enquanto em vida, ele foi ignorado. Esta é a drástica recompensa da História, os medíocres mantem uma corte a festejá-los em vida, depois que morrerem serão de pronto esquecidos. De Abel ainda se falará por séculos.

Exercícios: 60 *Exercícios gerais de integração*

Para todos os exercícios fazemos uma sugestão: Use também um programa como `integral.py` *e comparare os resultados sob dois aspectos:* tempo e precisão. *O cálculo da integral, aproximadamente, com um programa de computador, também, representa um teste para os seus cálculos.*

1. *Calcule as integrais abaixo:*

$f(x) =$	$[a,b]$	$f(x) =$	$[a,b]$
$a)\frac{x+2}{x^2+x}$	$[-3,-2]$	$b)\ \frac{1}{1+x^2}$	$[-1,1]$
$c)\lvert ln(x)\rvert$	$[0.5,2]$	$d)\ \frac{2x}{1+x^2}$	$[-4,4]$
$e)\lvert x^2+3x+2\rvert$	$[-4,6]$	$f)\ \frac{1}{a^2sin^2x+b^2cos^x}$	$[-4,4]$

2. *Calcule as integrais abaixo:*

$a)\int\limits_1^5 ln(t)dt$	$b)\ \int\limits_0^1 ln(t)dt$	$c)\int\limits_{-1}^{-5} \frac{dt}{t}$	$d)\ \int\limits_{-1}^{-5} ln\lvert t\rvert dt$
$e)\int\limits_{-5}^5 ln\lvert t\rvert dt$	$f)\ \int\limits_1^5 \frac{e^t dt}{t}$	$g)\ \int\limits_1^5 log(e^{sen(x)})dx$	$h)\ \int\limits_0^1 te^t dt$

3. *Seja* $G(x) = \int\limits_1^x \frac{exp(t)}{t}dt$.
   - *Verifique* $G(1) = log(1)$.
   - *Verifique* $G'(1) > 1$.
   - *Conclua que* $G(x) > log(x) \ \Leftarrow\ x > 1$ *e que* $G(x) < log(x) \ \Rightarrow\ x \in (0,1]$.

4. *Calcule* f, *sabendo que*
$$f^2(x) = \int\limits_0^x f(t)cos(t)dt.$$

5. *Construa uma função* f *tal que*
   - $f(3) = 1$
   - $f'(3) = 1$
   - $f(x) > x-2$ *para todo* x ; $x > 3$.

   faç a o gráfico no mesmo sistema de eixos de $y = f(x)$ *e de* $y = x-2$. *Mostre um método para construir uma infinidade de funções satisfazendo as condições do problema.*

5.15 O teorema fundamental do Cálculo - primeira versão.

O objetivo desta seção é descobrir uma relação entre f e $\int_a^b f'$ Esta relação é a expressão do *Teorema Fundamental do Cálculo.*

Exercícios: 61 1. *Primeira experiência.*

(a) *Faça o gráfico de $f(x) = x + 2$ e calcule*

$$\int_0^3 x+2 \qquad \int_{-2}^3 x+2 \qquad \int_{-4}^3 x+2$$

(b) *Calcule*

$$\int_{-2}^0 x+2 \qquad \int_{-2}^1 x+2 \int_{-2}^2 x+2$$

(c) *Encontre uma fórmula para*

$$g(t) = \int_{-2}^t x+2$$

quando t for um número real qualquer. Verifique a relação: $g'(t) = f(t) = x + 2$.

(d) *Teorema Fundamental do Cálculo Verifique que*

$$\int_a^b f = g(b) - g(a)$$

2. *Segunda experiência.*

(a) *Faça o gráfico de $f(x) = 2x - 4$ e calcule*

$$\int_0^4 2x-4 \qquad \int_2^4 2x-4 \qquad \int_3^3 2x-4$$

(b) *Calcule*

$$\int_{-2}^0 2x-4 \qquad \int_{-2}^1 2x-4 \qquad \int_{-2}^2 2x-4$$

(c) *Encontre uma fórmula para*

$$g(t) = \int_2^t 2x-4$$

quando t for um número real qualquer. Verifique a relação: $g'(t) = f(t) = 2x - 4$.

(d) *Teorema Fundamental do Cálculo Verifique que*

$$\int_a^b f = g(b) - g(a)$$

Verificamos a relação

$$\int_a^b g'(t) = g(b) - g(a) \tag{5.38}$$

quando g' for uma função do primeiro grau, neste caso g será uma função do segundo grau. Na próxima seção vamos explorar este fato, *mesmo sem comprovação*, com funções polinomiais de grau maior. Numa próxima lista construiremos a demonstração para uma função polinomial qualquer.

5.16 Cálculo de áreas.

Use o Teorema Fundamental do Cálculo:

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) \quad \Leftarrow \quad F' = f \tag{5.39}$$

mesmo sem uma demontração , para calcular as integrais abaixo:

Exercícios: 62 *Teorema Fundamental do Cáculo*

1. *Calcule*

$$\int_0^3 x^2 \qquad \int_0^3 3x \qquad \int_0^3 2.$$

2. *Verifique que*

$$\int_0^3 x^2 + 3x + 2 = \int_0^3 x^2 + \int_0^3 3x + \int_0^3 2.$$

3. *Calcule as integrais seguintes:*

a) $\int_{-3}^{5} x^3.$	b) $\int_{-5}^{3} x^3.$	c) $\int_{-3}^{3} x^3.$	d) $\int_{-3}^{5} x^4.$	e) $\int_{-5}^{3} x^4.$	f) $\int_{-3}^{3} x^4.$

Capítulo 6

Sucessões, séries e Desigualdades.

Neste capítulo vamos estudar algumas desigualdades fundamentais e ver exemplos de aplicações das mesmas na determinação de limites de sucessões.

Duas desigualdades fundamentais vão ser usadas aqui:

1. Dados dois números reais positivos a, b então
$$\text{média geométrica} = \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} = \text{a média aritmética.}$$
2. generalização da desigualdade das médias.
$$\text{média geométrica} = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} = \text{a média aritmética.}$$
3. Desigualdade de Cauchy-Schwarz: dados dois vetores x, y chame θ o ângulo agudo entre eles, então:
$$| < x, y > | \leq |x||y|$$
porque o produto escalar, definido geométricamente, é:
$$< x, y >= |x||y|cos(\theta).$$
4. generalização da desigualdade de Cauchy-Schwarz
$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}$$

6.1 Desigualdades

Exercícios: 63 *A desigualdade de Cauchy-Schwarz*

1. *Mostre que dados dois vetores no plano, x, y eles determinam um ângulo menor ou igual a 90°, θ e que*
$$|x||y|\cos(\theta) \leq |x||y|$$

2. *Considere dois vetores, x, y, no círculo trigonométrico. Mostre que*

$$x_1y_1 + x_2y_2 = \cos(\theta),$$

em que θ é o ângulo agudo, (na pior das hipóteses retângulo), entre os dois vetores.

3. *Generalize a desigualdade anterior considerando dois vetores x, y quaisquer do plano:*

$$x_1y_1 + x_2y_2 = |x||y|\cos(\theta),$$
$$x_1y_1 + x_2y_2 = |x||y|\cos(\theta), \tag{6.1}$$

sendo θ o ângulo agudo entre os dois vetores.

4. *Verifique que é verdadeira a seguinte formulação: Se $x \in \mathbf{S}^1$ em que $\mathbf{S}^1$ representa o círculo trigonométrico, então existe um par de ângulos complementares, (cuja soma é$\frac{\pi}{2}$), tal que $x = (cos\theta_1, cos\theta_2)$.*

Definição: 32 *Cosenos diretores de uma reta.*

Os números $\cos\theta_1, \cos\theta_2$ se chamam cosenos diretores da reta que passa na origem e pelo ponto $(\cos\theta_1, \cos\theta_2)$.

Reformule a expressão 6.1 definindo cosenos diretores *apropriados.*

5. *Prove que $x \in S^2$, em que S^2 representa a esfera unitária do $\mathbf{R}^3$, se, e somente se,*

$$\exists\theta_1, \theta_2 \geq 0 \ ; \ \theta_1 + \theta_2 = \pi \tag{6.2}$$
$$\exists\alpha \ ; \ 0 \leq \alpha \leq \pi \ ; \tag{6.3}$$
$$x = (cos\alpha\cos\theta_1, sen\alpha\cos\theta_1, \cos\theta_2). \tag{6.4}$$

Identifique geométricamente o ângulo α. Mostre existe um par de ângulos complementares θ_{11}, θ_{12} tal que

$$x = (cos\theta_{11}\cos\theta_1, cos\theta_{12}\cos\theta_1, \cos\theta_2).$$

6. *Prove que $x \in \mathbf{S}^2$, em que $\mathbf{S}^2$ representa a esfera unitária do $\mathbf{R}^3$, se, e somente se,*

$$\exists\theta_1, \theta_2 \geq 0 \ ; \ \theta_1 + \theta_2 = \pi\exists 0 \leq \alpha \leq \pi \ ; \quad x = (cos\alpha\cos\theta_1, sen\alpha\cos\theta_1, \cos\theta_2) \tag{6.5}$$

$$\exists\theta_1, \theta_2, \theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{111}, \theta_{112}; \quad \textit{tres pares de ângulos complementares} \ ; \tag{6.6}$$
$$x = (\cos\theta_{111}\cos\theta_{11}\cos\theta_1, \cos\theta_{112}\cos\theta_{11}\cos\theta_1, \cos\theta_{12}\cos\theta_1, \cos\theta_2) \tag{6.7}$$

Identifique geométricamente o ângulo α. Mostre existe um par de ângulos complementares θ_{11}, θ_{12} tal que

$$x = (cos\theta_{11}\cos\theta_1, cos\theta_{12}\cos\theta_1, \cos\theta_2).$$

7. *Prove que $x \in \mathbf{S}^3$, em que $\mathbf{S}^3$ representa a esfera unitária do $\mathbf{R}^4$, se, e somente se,*

$$\exists\theta_1, \theta_2, \theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{111}, \theta 112; \quad \textit{tres pares de ângulos complementares} \tag{6.8}$$
$$; \quad x = (\cos\theta_{111}\cos\theta_{11}\cos\theta_1, \cos\theta_{112}\cos\theta_{11}, \cos\theta_1), \cos\theta_{12}\cos\theta_1, \cos\theta_2). \tag{6.9}$$

Identifique geométricamente os pares de ângulos θ_{X1}, θ_{X2}.

8. *Generalize a desigualdade anterior considerando dois vetores $x, y \in \mathbf{R}^n$ quaisquer do espaço de dimensão n.*

$$x_1y_1 + \ldots + x_ny_n = |x||y|\cos(\theta),$$

sendo θ o ângulo agudo entre os dois vetores.

9. *Deduza do anterior que, dados os números reais a_1, a_2, b_1, b_2 então*

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$$

10. *Mostre que dados $2n$ números reais $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ se tem*

$$(\sum_{k=1}^{n} a_ib_i)^2 \leq (\sum_{k=1}^{n} a_i^2)(\sum_{k=1}^{n} b_i^2)$$

11. *<u>média geométrica-média aritmética</u> Mostre que se a, b forem dois números positivos, então*

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

Exercícios: 64 *Séries e indução.*

1. *Verifique que se*

$$a_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots \frac{n-1}{2\cdot n}$$

então $a_n = \frac{n}{n+1}$. Prove esta asserção usando indução finita.

2. *Prove que*

$$\lim_n \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots \frac{n-1}{2\cdot n} = \lim_n \frac{n}{n+1} = 1$$

Exercícios: 65 *Função contínua e limite.*

1. *Mostre que se a função f for contínua, então dada uma sucessão $a_n \to L$ também se tem $f(a_n) \to L$.*

2. *Mostre que*

$$\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \lim_n \sqrt[n]{L} = 1$$

se $a_n \to L$.

3. *Mostre que se a_n for limitada superiormente e inferiormente por constantes estritamente positivas, então*

$$\lim_n \sqrt[n]{a_n} = 1.$$

Exercícios: 66 *Desigualdades.*

1. *Prove que dados os números reais x, y então*
$$x^2 + 2xy + y^2 \geq 0.$$

2. *Mostre que se $x, y > 0$ então*
$$x^2 + xy + y^2 \geq 0.$$

3. *Mostre que se $x, y < 0$ então*
$$x^2 + xy + y^2 \geq 0.$$

4. *Mostre que se x, y tiverem sinais contrários, então*
$$x^2 + xy + y^2 = (x + y)^2 - xy$$
é uma soma de números positivos logo
$$x^2 + xy + y^2 \geq 0.$$

5. *Deduza diretamente da desigualdade 15, página 123, que*
$$x^2 + xy + y^2 \geq 0.$$

Exercícios: 67 *Convergência em média aritmética.*

1. *Mostre que se $a = a_n$ for uma sucessão limitada, então*
$$\sum_n \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$$
é convergente.

Solução: 18 *Chame $s_n = \sum\limits_n \frac{a_1+\ldots+a_n}{n}$ e calcule a diferrença $s_n - s_m$ em que n, m são dois números naturais arbitrariamente grandes. Para simplificar suponha que $n < m; m = n + k$. Então*

$$s_n - s_m \tfrac{a_1+\ldots+a_{n+k}}{n+k} - \tfrac{a_1+\ldots+a_n}{n} = \tag{6.10}$$
$$= \tfrac{-ka_1+\ldots-ka_{n+k}+na_{n+1}+\ldots+na_{n+k}}{n(n+k)} \leq \tag{6.11}$$
$$\tfrac{-kna+nkA}{n(n+k)} = \tfrac{kn(-a+A)}{n(n+k)} \to 0 \tag{6.12}$$

2. *Mostre que se $a = a_n$ for uma sucessão convergindo para L, então*
$$\sum_n \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$$
converge para L também.

Solução: 19 *Pelo item anterior a é convergente, basta verificar, usando a definição de limite, que converge para L.*

3. *Mostre que se a for uma sucessão de números positivos limitada superiormente pelo número positivo L então*
$$\sum_n \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$$
converge para um número l ; $0 \leq l \leq L$.

Capítulo 7

Arcos, volumes, superfícies

Este capítulo vai tratar de problemas geométricos e gráficos em que a derivada e a integral atuam como instrumento para construir a solucao.
Os tipos de problemas que vamos estudar incluem

- uso da derivada na determinação de tangentes,
- a regra de l'Hôpital,
- a derivada e a mudança de concavidade,
- cálculo do comprimento de arcos,
- alguns tipos de volumes e superfícies.

7.1 Interpretação geométrica da derivada.

Derivada e coeficiente angular.
Se uma curva tiver tangente em um determinado ponto P, o coeficiente angular desta tangente "memoriza" o coeficiente angular instantâneo da curva naquele ponto, é o que acontece com a pedra rodando presa a um cordão, quando o cordão se rompe: a pedra sai pela tangente que representa o *último estado do movimento da pedra presa ao cordão*, ver figura (fig. 1.13), página 22.
Aqui vamos incluir "tecnologia" na idéia que estavamos usando intuitivamente.

Exercícios: 68 *Derivada, tangente e coeficiente angular*

1. (a) *Trace o gráfico da função* $f(x) = x^2 - x - 6$;
   (b) *Calcule* $y = f'(x)$ *e preencha a tabela tabela abaixo com os valores apropriados:*

x	$f(x)$	$f'(x)$
-5		
-3		
-2		
-1		

x	$f(x)$	$f'(x)$
-0.5		
0		
0.5		
1		

x	$f(x)$	$f'(x)$
2		
2.5		
3		
4		

   (c) *Em um gráfico separado, desenhe pequenos segmentos de reta passando no ponto* $(x, f(x))$ *em que* x *é o ponto em que a derivada foi calculada. Observe que* o conjunto destes segmentos de reta *oferecem uma idéia do* comportamento *da função. Comente este última frase.*
   (d) *Tambem em gráfico separado, trace segmentos de reta passando na na origem tendo por coeficiente angular os valores tabulados para* $f'(x)$. *Veja que o conjunto destes segmentos de reta oferece uma outra idéia diferente do caso anterior: eles descrevem a variação máxima e mínima do coeficiente angular de* f *ao longo de um certo intervalo de tempo.*
   (e) *Repita os itens anteriores com uma tabulação mais fina e construa assim, com precisão, o gráfico de* f.

2. *Considere agora a função* $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$.
   (a) *Construa a tabela abaixo completando os valores*

x	$f(x)$	$f'(x)$
-10		
-9		
-8		
-5		
-4		
-3		

x	$f(x)$	$f'(x)$
-2		
-1		
-0.5		
0		
0.5		
1		

x	$f(x)$	$f'(x)$
2		
3		
4		
5		
6		
7		

   (b) *Em um gráfico separado, desenhe pequenos segmentos de reta passando no ponto* $(x, f(x))$ *em que* x *é o ponto em que a derivada foi calculada. Observe que* o conjunto destes segmentos de reta *oferecem uma idéia do* comportamento *da função. Comente este última frase.*
   (c) *Tambem em gráfico separado, trace segmentos de reta passando na na origem tendo por coeficiente angular os valores tabulados para* $f'(x)$. *Veja que o conjunto destes segmentos de reta oferece uma outra idéia diferente do caso anterior: eles descrevem a variação máxima e mínima do coeficiente angular de* f *ao longo de um certo intervalo de tempo. É uma espécie de* relógio da variação *de* f.
   (d) *Repita os itens anteriores com uma tabulação mais fina e construa assim, com precisão, o gráfico de* f.

3. *Calcule a segunda derivada das funções*

   (a) $f(x) = x^2 - 2x - 1$ (b) $f(x) = sen(x)$
   (c) $f(x) = x^2 sen(x)$ (d) $f(x) = x^2 + 3x sen(x) - 1$

4. *Significado da derivada na análise de curvas*
   (a) *Para cada uma das funções abaixo*

(a) $f(x) = x^2 - 2x - 1$ *(b)* $f(x) = sen(x)$
(c) $f(x) = x^2 sen(x)$ *(d)* $f(x) = x^2 + 3xsen(x) - 1$

construa uma tabela no formato

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$

com $x \in [-4, 4]$ *e* 0.5

(b) *Observando o gráfico de f, em cada caso*[1], *análise o significado da segunda derivada relativamente ao crescimento da função.*

(c) *Verifique que numa parábola,* $y = f(x) = Ax^2 + Bx + C$, *podemos determinar o ponto médio das raizes usando a derivada* $f'(x)$. *Encontre* <u>*como*</u>, *encontre a fórmula do ponto médio das raizes. Verifique que o* ponto médio das raizes de uma parábola *independe do fato de as raizes serem reais ou complexas "*$\Delta < 0$*".*

5. *Calcule as derivadas até a terceira ordem da função*

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 5$$

e faça, sucessivamente, nesta ordem, os gráficos de f''', f'', f', f *usando as informações da derivada para construir o gráfico de cada uma das funções para finalmente obter o gráfico de* f.

Determine

- *em que intervalos f tem máximos e mínimos relativos,*
- *em que intervalos f tem raizes,*
- *em que intervalos f é crescente,*
- *em que intervalos f é decrescente,*
- *em que intervalos f muda de concavidade*[2].

Use todas estas informações para fazer o gráfico de f com grande precisão.

6. *Encontre a a família:* círculos de centro em $(0, 4)$ tangentes à parábola determinada pelos pontos $(-2, 0), (0, -2), (2, 0)$. *Determine as equações destes círculos.*

[1] Construa o gráfico com um programa de computador, ou a mão ...
[2] Observe que pedimos "o intervalo" e não o ponto em que os eventos ocorrem, porque?

7.2 Comprimento de arco

Vimos que a região limitada pelo gráfico de uma função, pelo eixo OX e dois pontos $x = a, x = b$ no domínio de f *pode* ter uma área representada pelo símbolo

$$\int_a^b f(t)dt.$$

Há várias formas de generalizar o significado deste símbolo. Um das maneiras de fazê-lo evolue a partir do *método de integração* "mudança de variável" que nós vamos retomar aqui para conseguir uma nova visão da integral e para mostrar uma utilização mais efetiva deste *método de integração.*
Nosso objetivo imediato: *calculo de comprimentos de arcos*, vamos aprender aqui a calcular, por exemplo, a medida da fronteira de uma região complementando o que aprendemos antes, calcular a medida de regiões planas.

A ideia é bem simples e a figura (fig. 7.1) página 244, mostra o seu conteúdo geométrico: "*substituimos o* $graf(f)$ *por uma poligonal subdividindo o domínio da curva em n partes*". Agora vamos calcular o comprimento de cada lado da poligonal e somar estes comprimentos.

Como no caso das somas de Riemann, à medida que refinarmos a partição do intervalo, vamos obter uma poligonal que mais e mais se aproxima do $graf(f)$ e consequentemente o comprimento desta poligonal se aproxima do comprimento de arco de $graf(f)$. É o mesmo que se faz com polígonos regulares convexos inscritos em um círculo para obter o "perímetro do círculo" por menor, (ou por maior, com polígonos circunscritos).

Vamos aos cálculos.

Cada lado da poligonal vai medir:

$$d((a_k, f(a_k)), (a_{k+1}, f(a_{k+1})))$$

em que $(a_k, f(a_k))$ representa um ponto sobre $graf(f)$.

$$I_k = d((a_k, f(a_k)), (a_{k+1}, f(a_{k+1}))) = \tag{7.1}$$

$$\sqrt{(a_{k+1} - a_k)^2 + (f((a_{k+1}) - f(a_k))^2)} = \tag{7.2}$$

$$(a_{k+1} - a_k)\sqrt{\frac{(a_{k+1}-a_k)^2}{(a_{k+1}-a_k)^2} + \frac{(f((a_{k+1})-f(a_k))^2)}{(a_{k+1}-a_k)^2}} = \tag{7.3}$$

$$\sqrt{1 + \frac{(f((a_{k+1})-f(a_k))^2)}{(a_{k+1}-a_k)^2}}(a_{k+1} - a_k) = I_k \tag{7.4}$$

Observe que estas equações são idênticas pois foram obtidas por uma sucessão de equivalências algébricas. Se, na última equação substituirmos:

$$\Delta x = (a_{k+1} - a_k) \ ; \ \Delta y = f((a_{k+1}) - f(a_k))$$

vamos ter:

$$\sqrt{1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}}\Delta x$$

que podemos idenficar como:

- $\sqrt{1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}}\Delta x$ é uma parcela de uma soma de Riemann

$$\sum_{k=0}^{n-1} I_k = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}}\Delta x,$$

e

- Um quociente de diferenças ao quadrado em $\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}$

portanto o limite desta expressão vai ser uma integral e dentro da integral vai estar a derivada de f quadrado somada ao número 1, dentro de uma raiz quadrada, eis a integral:

$$\mathcal{C}(graf(f))_{[a,b]} = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$$

Figura 7.1: Uma poligonal que liga pontos no gráfico de f.

Exercícios: 69 *Comprimento de arcos*

1. *Verifique que meio círculo é dado pelo gráfico da função*

$$y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \ ; \ x \in [-r, r].$$

Calcule o semi-perímetro deste círculo e o perímetro. Sugestão, use a mudança de variáveis:

$$x = rcos(\theta) \ ; \ y = rsen(\theta) \ ; \ \theta \in [0, \pi]$$

2. *Calcule o comprimento de arco dos gráficos das funções seguintes (nos intervalos indicados):*

f	$[a,b]$	f	$[a,b]$
$a) f(x) = x + 3$	$[-3, 0]$	$b)\ f(x) = x^2 + 3x$	$[-1, 1]$
$c) f(x) = x^2$	$[0, 1]$	$d)\ f(x) = sen(x)$	$[-\pi, \pi]$
$e) f(x) = x^2$	$[-1, 0]$	$f)\ f(x) = cos(x)$	$[-\pi, \pi]$

7.3 Primeira generalização do comprimento de arco

Um dos exercícios da seção anterior consistia do cálculo do "semi-perímetro" do círculo.

Porque o semi-perímetro e não o perímetro?

A resposta a esta pergunta vem na seguinte observação: O "semi-perímetro" é a medida do arco de uma função da variável x como tradicionalmente vemos a equação do círculo. O perímetro não corresponderia ao gráfico de uma função.

Mas se mudarmos a "variável", seguindo a sugestão do exercício, podemos ver o círculo representado pelo par de equações:

equações paramétricas do círculo

$$p(\theta) = \begin{cases} x = & rcos(\theta) \\ y = & rsen(\theta) \end{cases} \tag{7.5}$$

Este sistema de equações nada mais é que um novo tipo de função:

$$[0, 2\pi] \xrightarrow{p} \mathbf{R}^2 \ ; \ \theta \mapsto (rcos(\theta), rsen(\theta)),$$

e agora a condição para ser função, "a cada ponto do domínio corresponde um único valor" é plenamente atendida.

Vamos adaptar a fórmula do comprimento do arco às equações paramétricas do círculo. Como estes cálculos podem servir a diversos outros fins, vamos separá-los em uma secção específica.

7.3.1 Diferenciação e equações paramétricas

Caso univariado

Se $y = f(x)$ for uma função derivável, em qualquer ponto $(a, f(a))$ do gráfico existe uma reta tangente que memoriza o coeficiente angular instantâneo de f naquele ponto, $m = f'(a)$ quer dizer que equação da reta é:

$$y - f(a) = m(x - a) = f'(a)(x - a).$$

Se agora considerarmos x "muito próximo" de a e representarmos

$$dx = x - a \ ; \ dy = y - f(a)$$

então o coeficiente angular $m = \frac{dy}{dx}$.

Esta notação, $f'(a) = \frac{dy}{dx}$, se deve a Leibniz e o comportamento desta expressão como "fração" é uma consequência do teorema sobre limite do quociente.

Retiramos, assim, uma regra:

Teorema: 20 *Equação da reta tangente*

Se f for diferenciável na vizinhança de um ponto $\underline{a}$ então a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$ é

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \ \equiv \ y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Caso bivariado

Podemos usar derivação implícita e generalizar esta expressão para funções multivariadas. Analise os cálculos seguintes:

$$\rho(\theta) = (rcos(\theta), rsen(\theta)) \tag{7.6}$$

$$d\rho = \begin{pmatrix} -rsen(\theta)d\theta + cos(\theta)dr \\ rcos(\theta)d\theta + sen(\theta)dr \end{pmatrix} \tag{7.7}$$

$$d\rho = \begin{pmatrix} -rsen(\theta) & cos(\theta) \\ rcos(\theta) & sen(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\theta \\ dr \end{pmatrix} = \tag{7.8}$$

$$d\rho = J(\rho) \begin{pmatrix} d\theta \\ dr \end{pmatrix} \tag{7.9}$$

Você deve reconhecer na última equação expressão idêntica a que obtivemos anteriormente para o caso univariado:

$$dy = f'(a)dx \equiv d\rho = J(\rho) \begin{pmatrix} d\theta \\ dr \end{pmatrix}$$

Nestes cálculos fizemos uso de diversos métodos usados em vários pontos do texto, como *derivação implícita*, *diferencial*, *derivação parcial* .

A última expressão, $J(\rho)$ recebe um nome complicado[3] para a derivada de uma função de duas variáveis. É a "jacobiana" de ρ.

Quando uma função for multivariada, a sua derivada se compõe das *derivadas parciais* de todas as *funções parciais* envolvidas calculadas relativamente a todas as *variáveis envolvidas*. Cada uma dessas derivadas se chama *derivada parcial*. O conjunto destas derivadas parciais formam a matriz chamada *matriz jacobiana* da função que nada mais do que a derivada da função que recebeu este nome devido à falta de compreensão que os nossos antepassados tinham sobre a derivada.

A notação $dr, d\theta$ serviu no passado para indicar em relação a quem foi calculada a derivada parcial. Este foi o seu uso inicial. Com o tempo se verificou que o formalismo envolvido herda todas as propriedades algébricas da multiplicação e adição. No caso multivariado estas operações aparecem dentro das multiplicações matriciais.

Os símbolos $dr, d\theta$, que foram usados inicialmente apenas como indicadores de qual variável se usava para derivar, adquiram assim vida própria e um misticismo que criou dificuldades específicas fazendo que com eles recebessem o nome de "diferencial". Hoje compreendemos bem o que signfica o diferencial, nada mais é que uma *nova variável* que permite um cálculo matricial (no caso multivariado) e uma representação aproximada linear para uma função derivável.

Veja a última equação na série de cálculos acima, ela nos diz que existe uma matriz, $J(\rho)$ que representa uma função linear que serve para aproximar ρ. Nos exercícios que seguem estas idéias serão concretizadas.

Exercícios: 70 *Diferencial*

1. <u>*equação da reta tangente*</u>

   (a) *Entenda $dx := x - a$ para valores de x muito próximos de a. Entenda $dy := f(x) - f(a)$. Substitua estes valores na expressão:*

   $$dy = f'(a)dx$$

   e verifique que o resultado é a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$.

   (b) *Para $y = f(x) = x^2 - 3x - 10$ calcule a equação da reta tangente ao gráfico de f nos pontos $(5,0), (-2,0)$ e faça os correspondentes gráficos.*

2. <u>*teorema da função implícita*</u>

   (a) *Considere $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4$. Suponha que para um ponto (a, b) do plano se tenha uma identidade acima[4]. Derive implicitamente f e calcule a equação da reta tangente ao gráfico da curva $x^2 + y^2 - 4$ no ponto (a, b). Observe que estamos usando a expressão $f(x, y) = 0$.*

   (b) *Verifique que o ponto $(a, b) = (2, 0)$ transforma a equação $f(x, y) = 0$ numa identidade, calcule a equação a reta tangente ao gráfico do círculo $x^2 + y^2 = 4$ neste ponto.*

   (c) *Encontre y tal que $f(1, y) = 0$. Calcule as equações das retas tangentes ao círculo $x^2 + y^2 = 4$ nos pontos encontrados.*

3. <u>*teorema da função implícita*</u>

   (a) *Considere $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4$. Suponha que para um ponto (a, b) do plano se tenha a identidade: $f(a, b) = c$. Derive implicitamente f e calcule a equação da reta tangente ao gráfico da curva $x^2 + y^2 - 4 = c$ no ponto (a, b). Observe que estamos usando a expressão $f(x, y) = c$.*

   (b) *Verifique que o ponto $(a, b) = (2, 2)$ transforma a equação $f(x, y) = 4$ numa identidade, calcule a equação a reta tangente ao gráfico do círculo $x^2 + y^2 = 12$ neste ponto.*

   (c) *Verifique que o círculo $x^2 + y^2 = 12$ é imagem no plano (projeção) da interseção de $z = f(x, y)$ com o plano $z = 8$, portanto na questão anterior foi encontrada a equação da reta tangente a um ponto desta projeção.*

   (d) *Encontre a equação da projeção da interseção de $z = f(x, y)$ com o plano $z = 21$. Calcule a equação da reta tangente a esta projeção no ponto $(3, 4)$.*

4. <u>*teorema da função implícita*</u>

   (a) *Considere $z = f(x, y)$ a expressã de z como função das variáveis x, y. Usando os símbolos $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ para representar as derivadas parciais de f com respeito a x e a y, escreva a derivada ímplicita da expressão $z = f(x, y)$.*

   (b) *Considere os tres números a, b, c que tornem $z = f(x, y)$ uma identidade: $c = f(a, b)$. Verifique que existe uma curva plana, $f(x, y) = c$ que é projeção da interseção do $graf(f)$ com o plano $z = c$ e mostre que a equação da reta tangente ao gráfico $f(x, y) = c$ no ponto (a, b) é da forma:*

   $$\frac{\partial f}{\partial y}(y - b) = -\frac{\partial f}{\partial x}(x - a)$$

[3] e cheio de preconceitos

[4] em outras palavras o ponto (a, b) satisfaz esta equação

(c) *Conclua que uma das seguintes possibilidades ocorre*

- *Se pudessemos explicitar y como função de x na expressão* $f(x,y) = c$, *então teriamos, numa vizinhança do ponto* (a,b), *no plano, a função* $y = g(x)$. *Determine* $g'(a)$ *em termos das derivadas parciais de* f.
- *Se pudessemos explicitar x como função de y na expressão* $f(x,y) = c$, *então teriamos, numa vizinhança do ponto* (a,b), *no plano, a função* $x = h(y)$. *Determine* $h'(b)$ *em termos das derivadas parciais de* f.

5. *teorema da função implícita Enuncie o* Teorema da Função explicita *e depois consulte um livro de Cálculo para verificar a correção do seu enunciado.*

6. *Cálculo da derivada usando T. da função implícita*

(a) *Sabendo que uma curva* $y = f(x)$ *tem as equações paramétricas*

$$x = h(t) \ ; \ y = g(t),$$

calcule $dx, dy, e f'(x)$.

(b) *Calcule a derivada num ponto qualquer do círculo*

$$H(t) = \begin{cases} x = rcos(t) \\ y = rsen(t) \end{cases}$$

indicando em que intervalos é que se tem $y = f(x)$ *ou* $x = g(y)$.

(c) *Considerando a expressão da derivada no círculo, encontre uma expressão equivalente para:*

$$\sqrt{1 + f'(x)^2}dx$$

que seja válida em qualquer intervalo.

(d) *Calcule o perímetro do círculo.*

7.3.2 Integrais elípticas

Vamos ver um tipo de integral que não podemos calcular por meios formais (usando os tradicionais métodos de integração).

Exemplo: 23 *O perímetro da elipse*

Neste exemplo vamos mostrar que pequenas modificações em uma equação podem torná-la uma expressão inteiramente diferente da primitiva no sentido de que um método antes utilizado na expressão primitiva já não seja mais efetivo com a nova expressão. Este exemplo mostra também a importância do cálculo numérico de integrais *que não sofre desta falta de estabilidade.*

Elipses são círculos deformados, a equação da elipse com coeficientes de deformação $\underline{a}$ *no eixo* OX *e coeficiente de deformação* $\underline{b}$ *no eixo* OY *é:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = r^2$$

Esta equação pode ser obtida como uma transformação feita na equação círculo. As equações paramétricas da elipse são:

$$x = ar\ cos(t) \ ; \ y = br\ sen(t)$$

e podemos derivar implicitamente estas equações para obter

$$dx = -arsen(t)dt \ ; \ dy = brcos(t)dt$$

o que nos permite calcular a derivada num ponto qualquer da elipse, ora considerando $y = f(x)$ *ou* $x = g(y)$, *como foi feito no caso do círculo. Como os cálculos são equivalentes, vamos nos fixar num deles apenas.*

Nos intervalos da forma $(0, \frac{\pi}{2}) + k\pi$ *teremos* $y = f(x)$ *com*

$$x = ar\ cos(t) \ ; y = br\ sen(t);$$

e

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y} = -\frac{b\ cos(t)}{a\ sen(t)}$$

Podemos agora, como no caso do círculo, escrever uma expressão equivalente para:

$$\sqrt{1 + f'(x)^2}dx$$

resultando em

$$\begin{gathered}
\sqrt{1 + \tfrac{b^2cos^2(t)}{a^2sen^2(t)}}arsen(t)dt = \\
-r\sqrt{a^2sen^2(t) + b^2cos^2(t)}dt = \\
-r\sqrt{a^2sen^2(t) + b^2(1 - sen^2(t))}dt \\
-r\sqrt{a^2sen^2(t) + b^2 - b^2sen^2(t)}dt \\
-r\sqrt{(a^2 - b^2)sen^2(t)) + b^2}dt \\
-rb\sqrt{1 + (\tfrac{a^2-b^2}{b^2})sen^2(t)}dt
\end{gathered}$$

Agora, como queremos calcular o `perímetro` *da elipse e este é 4 vezes a quarta parte do perímetro, temos então:*

$$-4rb\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + (\frac{a^2 - b^2}{b^2})sen^2(t)}dt$$

Se $b \geq a$ como sempre podemos supor, ambos positivos, então no radicando temos

$$1 + ((\frac{a}{b})^2 - 1) = 1 - (1 - (\frac{a}{b})^2) = 1 - k^2 > 0 \ ; k^2 = \frac{b^2 - a^2}{b^2} < 1$$

será positivo. Mas não podemos aplicar o mesmo método que usamos no cálculo do perímetro do círculo.

*Caimos num tipo de integral chamada "*integral elíptica de segundo tipo*" que são as integrais da forma*

$$\mathcal{E}(k) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 - k^2 sen^2(t)} dt \ ; k \in (0,1)$$

Estas integrais não podem ser calculadas formalmente, (com auxílio do Teorema Fundamental do Cálculo), mas podem ser facilmente calculadas com somas de Riemann ou com um programa para cálculo numérico de integrais.

Pela importância que esta integral tem em cálculos astronômicos, foram criadas tabelas para o número $\mathcal{E}(k)$ para vários valores de k.

Exercícios: 71 *Comprimento de arco*

1. *Faça uma tabulação dos número $\mathcal{E}(k)$, das integrais elípticas de segundo tipo, com $k \in [0.1, 0.9]$, passo 0.1.*

2. *Calcule o perímetro da elipse $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 9$.*

3. *Calcule os comprimentos dos arcos das curvas abaixo:*

$\rho(t)$	$t \in [a,b]$	$\rho(t)$	$t \in [a,b]$
a) (t,t,t^2)	$t \in [-3,0]$	b) (t^2,t^3)	$t \in [-1,1]$
c) $(cos(t), sen(t), t)$	$t \in [0,\pi]$	d) $(e^t cos(t), e^t sen(t))$	$t \in [0,4]$
e) (t,t,t)	$t \in [-1,0]$	f) $(2cos(t), 3sen(t), t)$	$t \in [0,2\pi]$

4. *sem fazer contas... Considere, no círculo unitário $\mathbf{S}^1$, dois pontos A, B determinando o arco AB. Prove que o comprimento deste arco é o dobro da área do setor do círculo que ele compreende.*

7.4 Volume de sólidos de revolução

Se aplicarmos uma rotação ao gráfico de f em volta do eixo OX, veja a figura (fig. 7.2) página 251, vamos construir um sólido de revolução que se assemelha muito a um cilindro. Vamos usar o método de cálculo de volumes dos cílindros para obter o volume deste sólido.

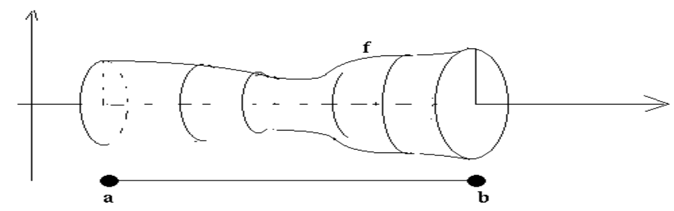

Figura 7.2: Fazendo o gráfico de f rodar em volta do eixo OX, se tem um sólido de revolução

Considere $graf(f)$, o gráfico de

$$[a,b] : \xrightarrow{f} \mathbf{R}$$

Se a função f for integrável uma expressão do tipo $\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x_k$ "converge" para $\int_a^b f(x)dx$.

Reciprocamente, expressões do tipo $\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x_k$ sugerem o limite $\int_a^b g(x)dx$. Temos que verificar se a função $[a,b] : \xrightarrow{f} \mathbf{R}$ é integrável e calcular os limites de integração usando os valores

$$k = 0 \to a \ ; \ b = a + n\Delta x = a + \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k.$$

Vamos aplicar isto rodando os retângulos de uma soma de Riemann. O resultando será uma coleção de cilindros e a soma dos volumes destes cilindros vai nos dar uma aproximação do volume de um sólido de revolução que tem como como fronteira a parede externa gerada pelo gráfico de f em rotação.

Cada cilindro tem por volume:

$$V_k = \pi f(x_k)^2 \Delta x_k = \pi r_k^2 h_k$$

que é área da base $(\pi f(x_k)^2)$ multiplicada pela altura (Δx_k). Então a soma dos volumes destes cilindros é:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \pi f(x_k)^2 \Delta x_k = \pi \sum_{k=0}^{n-1} g(x_k)\Delta x_k$$

cujo limite, se considerassemos uma sucessão de partições uniformes de norma $\frac{1}{n}$ seria $\pi \int_a^b g(x)dx$

em que $g(x) = f(x)^2$ logo, o volume do sólido seria

$$\pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

Exemplo: 24 *Volume da esfera*
A esfera de raio r pode ser obtida se rodarmos o gráfico de

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}\ ; x \in [-r, r]$$

em volta do eixo OX.
De acordo com os cálculos feitos acima, o volume da esfera seria dado por

$$\pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)dx.$$

De fato,

$$\pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)dx = \tag{7.10}$$

$$\pi(r^2x - \tfrac{x^3}{3})|_{-r}^{r} = \tag{7.11}$$

$$\pi(2r^3 - (\tfrac{r^3}{3} + \tfrac{r^3}{3})) = \tag{7.12}$$

$$\pi(2r^3 - 2\tfrac{r^3}{3}) = \pi\tfrac{6r^3-2r^3}{3} = \tfrac{4\pi}{3}r^3 \tag{7.13}$$

que é o valor conhecido para o volume de uma esfera de raio r.

Exercícios: 72 *Volume de sólidos*

1. *Calcule o volume de um cone de revolução obtido pela rotação de um triangulo retângulo com catetos $\underline{a}$ e $\underline{b}$ ao rodar em volta do cateto que mede $\underline{a}$.*
2. *Calcule o volume do sólido de revolução obtido ao rodar a senoide $y = f(x) = sen(x)$ em volta do domínio $[a, b] = [-\pi, \pi]$.*
3. *Calcule o volume do elipsoide gerado por rotação da elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = r^2$ em volta do eixo OX.*
4. *Calcule o volume do elipsoide gerado por rotação da elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = r^2$ em volta do eixo OY.*
5. *Um oleiro construiu uma curva especial para fazer os seus jarros de barro. Para isto cortou um modelo, em papel, da função:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2} & \Rightarrow \quad sen(x) \\ \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi & \Rightarrow \quad ax^3 + bx^2 + cx + d \end{cases} \tag{7.14}$$

para determinar o polinômio, o oleiro impôs as seguintes condições que fariam seus potes de barro de beleza notável:

$$f(\frac{\pi}{2}) = 1; f'(\frac{\pi}{2}) = 0; f(\frac{3\pi}{2}) = \frac{1}{2}; f'(\frac{3\pi}{2}) = 0;$$

O oleiro pede sua ajuda para calcular o volume dos seus jarros afim de colocar este valor ao lado preço.

7.5 A regra de l'Hôpital

A regra de l'Hôpital sugere uma saída para o cálculo de limites de quocientes nos casos em que o limite tanto do numerador como do denominador é zero. Dizemos que o quociente é indeterminado, o que temos uma *indeterminação.* Uma linguagem pitoresca e ántiga ainda diz que *devemos levantar esta indeterminação.*

Podemos fazer uma análise fina destes casos usando a derivada, na verdade a aproximação linear que vai ficar claro em nossa demonstração. Nos inspiramos no artigo de [6] que descreve como Newton e seus comtemporâneos descobriram as tangentes às curvas. No artigo citado nada há sobre a regra de l'Hôpital mas encontrei o caminho para a demonstração abaixo e para sua representação geométrica, lendo este artigo.

A regra de l'Hôpital permite que calculemos limites no formato

$$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

quando ambos os limites, no numerador e no denominador forem nulos.

Qual é o conteúdo do teorema de l'Hôpital? é bem simples. Se uma função f tiver derivada num ponto a então ela pode ser substituida, *localmente*, pela retangente ao gráfico de f naquele ponto:

$$f(x) \approx g(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

A aproximação indicada é fraca, quer dizer, podemos expressar a semelhança indicada de maneira mais forte:

- $\lim_{x=a} f(x) = \lim_{x=a} g(x) = f(a)$
- $\lim_{x=a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x=a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$

É este o significado da existência da derivada: se uma função tiver derivada no ponto $x = a$ o seu gráfico se confunde com o gráfico da reta tangente de tal modo que mesmo o quociente por $x - a$ não consegue estabelecer diferença entre ambas. Em Geometria isto se chama "osculação". Esta propriedade é transitiva, quer dizer:

- Se f e g se osculam no ponto $x = a$;
- se g e h se osculam no ponto $x = a$;
- então f e h se osculam no ponto $x = a$.

Exercício: 1 *Curvas que se osculam Veja que é fácil: Prove que a propriede "se oscular", entre dois gráficos, é transitiva. Prove que é uma relação de equivalência.*

Aqui entra a regra de l'Hôpital. Queremos calcular o limite $\lim_{x=a} \frac{f(x)}{g(x)}$ no caso em ambos os limites são nulos. Mas f oscula a reta tangente naquele ponto (se f for derivável), e g oscula a reta tangente, também, naquele ponto. Então vamos substituir f pela reta tangente $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ e g por $y = g'(a)(x-a) + g(a)$ no cálculo do limite.

Como, por hipótese: $f(a) = g(a) = 0$ então estamos substituindo:

- $f(x)$ por $f'(a)(x-a) = p(x-a)$
- $g(x)$ por $g'(a)(x-a) = q(x-a)$

Ver o gráfico (fig. 7.3), na página 254.

Figura 7.3: Gráfico de uma função e de sua tangente no ponto $(a, f(a))$.

Então quando tivermos que calcular o limite de um quociente, em um ponto $x = a$ em que denominador e numerador tiverem ambos valor zero. Podemos transformar o numerador e denominador nas retas tangentes e assim fazer uma análise mais acurada do que estiver acontecendo:

$$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x=a} \frac{f'(a)(x-a)}{g'(a)(x-a)} = \lim_{x=a} \frac{p(x-a)}{q(x-a)} \ ; \ p = f'(a); q = g'(a)$$

Porque, por hipótese, $f(a) = g(a) = 0$, temos

$$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x=a} \frac{f'(a)(x-a)}{g'(a)(x-a)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{p}{q}$$

cancelando $x - a$.

Se ainda ocorrer que $f'(a) = g'(a) = 0$, o método pode ser iterado para termos:

$$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f''(a)}{g''(a)}$$

e assim se deverá proceder até que se tenha um limite diferente de zero no denominador ou numerador. Temos assim tres possibilidades:

1. Ocorre simultaneamente, uma derivada de ordem n diferente de zero tanto no numerador como denominador, então o limite será:
$$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)(a)}}{g^{(n)}(a)} = \frac{p}{q} \ ; f^{(n)(a)} = p \ ; g^{(n)}(a) = q.$$
2. Na derivação de ordem n ; $q = g^{(n)}(a) \neq 0$ e $f^{(n)}(a) = 0$. O limite será:
$$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)(a)}}{g^{(n)}(a)} = \frac{0}{q} = 0 \ ; \ f^{(n)(a)} = 0 \ ; \ g^{(n)}(a) = q.$$
3. Na derivação de ordem n ; $0 = g^{(n)}(a) \neq 0$ e $f^{(n)}(a) = p \neq 0$ O limite não existe então.

Exercícios: 73 *Tangentes e limites*

1. *reta tangente Considere a função $f(x) = x^2 * sen(x/2)$*
   (a) *equação da reta tangente Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(\pi, f(\pi)) = (\pi, \pi^2)$*
   (b) *Escreva a equação da reta tangente ao grágico de f num ponto genérico a.*
   (c) *Veja, observando o gráfico de $f(x) = x^2 * sen(x/2)$, que o gráfico se assemelha ao gráficoe de $g(x) = x^3$ no ponto $x = 0$.*
   (d) *Calcule então o limite*
   $$\lim_{x=0} \frac{x^2 * sen(x/2)}{x^3}$$
2. *Calcule os limites abaixo, (quando existirem):*

a	$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{g(x)}$	a	$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{g(x)}$	a	$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{g(x)}$
0	$\frac{sen(x)}{x}$	*0*	$\frac{x^3}{x^2}$	*1*	$\frac{3x^2-2x-1}{x^2-x}$
0	$\frac{sen(x)}{1-cos(x)}$	*0*	$\frac{x^2}{x^3}$	*0*	$\frac{\sqrt{x}}{1-e^{2\sqrt{x}}}$
π	$\frac{sen(x)}{x-\pi}$	*0*	$\frac{e^{1/x}}{x}$	*0*	$\frac{sen(nx)}{sen(mx)}$
0	$\frac{sen(x)}{x^2}$	*1*	$\frac{x^n-nx}{(x-1)^2} \ ; \ n > 2$	*0*	$\frac{sen(nx)}{mx}$

   solução: há tres casos em que o limite não existe.
3.

Referências Bibliográficas

[1] Courant, Richard *Gauss and the present situation of the exact sciences* in The Spirit and the uses of the Mathematical Sciences - McGraw-Hill - paperbacks - 1969

[2] Praciano-Pereira, T *Cálculo com apoio computacional* - 1985 - Biblioteca da Universidade Federal de Goiás - Goiânia - Go

[3] Gerônimo, J.R. e Praciano-Pereira, T. *Cálculo Diferencial e Integral com apoio computacional* Vol I,II,III Pre-publicação do Dep. de Matemática - UEM - Maringá Pr - 1991

[4] Praciano-Pereira, T *Cálculo Avançado* - Publicação Preliminar - Dep. de Matemática - Universidade Federal do Rio Grande - Rio Grande - RS - 1998

[5] Praciano-Pereira, T *Cálculo Numérico Computacional - Introdução à programação* - Textos Universitários nº1 - Publicações da UVA - Sobral - Ce - 2000

[6] Paul R. Wolfson The crooked made stright: Roberval and Newton on tangents The American Mathematical Monthly Vol 108, nº3 pag 206-216 - 2001

Índice Remissivo